



**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID**

**DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS**

**Y TEORÍA DE ESTRUCTURAS**

**TESIS DOCTORAL**

**ANÁLISIS Y MODELIZACIÓN DE VIGAS DE TIPO  
LAMINADO SOMETIDAS A CARGAS IMPULSIVAS**

**AUTOR: CARLOS SANTIUSTE ROMERO**

**Ingeniero Industrial**

**DIRECTOR: Prof. Dr. D. Enrique Barbero Pozuelo**

**Leganés, 2007**



# TESIS DOCTORAL

## ANÁLISIS Y MODELIZACIÓN DE VIGAS DE TIPO LAMINADO SOMETIDAS A CARGAS IMPULSIVAS

Autor: Carlos Santiuste Romero

Director: Enrique Barbero Pozuelo

Tribunal Calificador:

Firma

Presidente:

Vocal:

Vocal:

Vocal:

Secretario:

Calificación:

Leganés, de de 2007



# AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, debo darle las gracias al profesor Enrique Barbero por todo el tiempo, la paciencia y el esfuerzo que me ha dedicado como director de esta tesis, prestándome una ayuda constante y desinteresada, pero sobre todo quiero darle las gracias por brindarme su amistad.

A la profesora Sonia Sánchez cuyo excelente trabajo motivó el inicio de esta tesis y cuya dedicación ha supuesto una enorme ayuda para su realización.

Al profesor Carlos Navarro por darme la oportunidad de formar parte de un grupo de investigación serio y respetado en el campo de los materiales compuestos.

A todos los compañeros del departamento por su ayuda inestimable, en especial a mis compañeros de despacho Guadalupe, David y Rolando por haberme prestado una valiosa ayuda pero, por encima de todo, por haber compartido conmigo mucho más que un despacho; a Jorge López, por sus consejos y por su ayuda informática; a Shirley García por su colaboración desinteresada; a Sergio Puerta y Pepe Puerta por su inestimable ayuda en el laboratorio; a Pepe Fernández, Ramón Zaera y José Luís Pérez Castellanos, por sus valiosos consejos y por ser un referente para los que empezamos esta carrera profesional; a José Antonio Loya y Ángel Arias, por el camino que han abierto; y al resto de compañeros por su apoyo y por su amistad.

Añadir un agradecimiento a las personas que, sin haber colaborado en la realización de esta tesis, han sabido mostrarme su apoyo y su cariño: a mis padres y hermanos, a mis amigos y muy especialmente a Marina.



## RESUMEN

En esta tesis se ha estudiado el comportamiento dinámico a flexión de vigas constituidas por materiales compuestos de tipo laminado. Estos materiales son cada vez más utilizados en todo tipo de industrias, destacando en las industrias aeronáutica y aeroespacial por sus excelentes propiedades mecánicas específicas.

Se ha desarrollado un modelo analítico simplificado que considera tensiones de cortadura interlaminar y la existencia de acoplamiento entre esfuerzos de flexión y torsión, empleando el método de las funciones de influencia para su resolución que tiene la ventaja de ser un método independiente de las condiciones de contorno. El modelo ha sido validado mediante la comparación con un modelo numérico implementado en un código de elementos finitos y con ensayos experimentales.

Se ha implementado un modelo de comportamiento mecánico para laminados que considera diferentes mecanismos de fallo en un código de elementos finitos mediante una subrutina de usuario, que ha sido validado para la simulación de estructuras tipo viga sometidas a cargas impulsivas. Así mismo, este modelo ha sido empleado para analizar la influencia de la energía de impacto y de la geometría de la probeta en los resultados del ensayo de flexión dinámica.

Se ha realizado un estudio de tolerancia al daño a flexión sobre vigas de tipo laminado generando el daño mediante dos tipos de impacto que generan esfuerzos de flexión. Se ha estimado el daño producido mediante inspección por ultrasonidos y se han evaluado las propiedades residuales a flexión por ser el estado de carga más común en este tipo de estructuras. Se ha analizado la influencia del tipo de impacto y de la energía de impacto en las propiedades residuales a flexión.





# ABSTRACT

In this PhD thesis the behaviour of laminate beams has been studied under dynamics bending loads. Composite materials are frequently used in aeronautic and aerospace industries because of their excellent specific mechanical properties.

A simplified analytical model was developed considering interlaminar shear stresses and bending-torsion coupled effect. To solve model equations the influence functions method was applied because this method is independent of the boundary conditions. The influence functions method was validated comparing the results with those obtained by finite element method and experimental tests.

A mechanical behaviour model for laminates considering multiple failure models and erosion criterion was implemented in a commercial finite element code. This model was validated for simulating composite failure under impulsive bending loads by comparing with experimental results. The model was applied to study the influence of impact energy in the dynamic bending test results.

A study of bending damage tolerance of composite beams after two kinds of low velocity impact was carried out. The damage was evaluated by ultrasonic inspection and the residual mechanical properties were estimated by three points bending test because beams usually work under bending loads. The kind of impact and the impact energy were analyzed as the most important factors in the bending residual properties.



# ÍNDICE

<b>1. INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>1</b>
1.1. MOTIVACIÓN.....	1
1.2. OBJETIVOS.....	6
1.3. APORTACIONES ORIGINALES.....	7
1.4. CONTENIDO.....	8
<b>2. ANTECEDENTES.....</b>	<b>9</b>
2.1. INTRODUCCIÓN .....	9
2.2. MODELOS SIMPLIFICADOS DEL COMPORTAMIENTO A FLEXIÓN DE VIGAS DE MATERIAL COMPUESTO DE TIPO LAMINADO.....	12
2.2.1. Teoría de cortadura de primer orden.....	17
2.2.1.1. <i>Determinación del factor de cortante en laminados</i> .....	23
2.2.2. Acoplamiento de esfuerzos de flexión y torsión.....	29
2.2.3. Técnicas de resolución de las ecuaciones de movimiento de la viga.....	32
2.3. MODELIZACIÓN NUMÉRICA DEL COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE MATERIALES COMPUESTOS .....	35
2.3.1. Modelos de rotura en condiciones dinámicas.....	35
2.3.1.1. <i>Criterios de fallo en la lámina</i> .....	36
2.3.1.2. <i>Criterios de fallo del laminado</i> .....	40
2.3.2. Comportamiento frente a impactos de baja velocidad .....	42
2.4. TOLERANCIA AL DAÑO .....	44
2.4.1. Estudios de tolerancia al daño en materiales compuestos .....	45
2.4.2. Tolerancia al daño a flexión.....	48
2.4.3. Ensayos de flexión dinámica .....	50

<b>3. COMPORTAMIENTO A FLEXIÓN DE VIGAS CON ACOPLAMIENTO FLEXIÓN-TORSIÓN .....</b>	<b>53</b>
3.1. INTRODUCCIÓN.....	53
3.1.1. Planteamiento general.....	54
3.1.2. Descripción de las vigas analizadas en el estudio.....	56
3.1.3. Modelos numéricos de verificación .....	58
3.2. INFLUENCIA DE LAS TENSIONES DE CORTADURA INTERLAMINAR EN VIGAS DE TIPO LAMINADO .....	61
3.2.1. Modelización del problema mediante análisis modal.....	61
3.2.2. Planteamiento del estudio del efecto de las tensiones de cortadura .....	65
3.2.3. Resultados del análisis estático.....	70
3.2.4. Resultados del análisis dinámico.....	79
3.3. VALIDACIÓN DEL MÉTODO DE LAS FUNCIONES DE INFLUENCIA EN EL CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS DINÁMICOS EN LAMINADOS.....	88
3.3.1. Método de las funciones de influencia .....	88
3.3.2. Planteamiento del estudio de validación del método de las funciones de influencia.....	91
3.3.2.1. Comparación con el método de los elementos finitos.....	92
3.3.2.2. Comparación con resultados experimentales .....	94
3.3.3. Resultados del estudio de validación del método de las funciones de influencia.....	95
3.3.3.1. Comparación con el método de los elementos finitos.....	95
3.3.3.2. Comparación con resultados experimentales .....	99
3.4. ANÁLISIS DEL ACOPLAMIENTO DE ESFUERZOS FLEXIÓN-TORSIÓN EN LAMINADOS.....	101
3.4.1. Fenómeno de acoplamiento flexión-torsión en laminados .....	101
3.4.2. Planteamiento del estudio del fenómeno de acoplamiento flexión-torsión .....	103
3.4.3. Resultados del estudio del fenómeno de acoplamiento flexión-torsión .....	107

<b>4. MODELO DE COMPORTAMIENTO MECÁNICO APLICADO A LA SIMULACIÓN DE ENSAYOS DE FLEXIÓN DINÁMICA .....</b>	<b>115</b>
4.1. INTRODUCCIÓN .....	115
4.2. MODELO DE COMPORTAMIENTO MECÁNICO.....	116
4.3. APLICACIÓN DEL MODELO DE COMPORTAMIENTO .....	122
4.3.1. Material empleado .....	122
4.3.2. Procedimiento experimental.....	124
4.3.2.1. Técnicas de medida del desplazamiento.....	127
4.3.2.2. Análisis de los resultados del ensayo.....	134
4.3.3. Modelización del ensayo de flexión dinámica .....	137
4.4. VALIDACIÓN DEL MODELO DE COMPORTAMIENTO.....	139
4.4.1. Planteamiento del proceso de validación .....	140
4.4.2. Comparación de las técnicas de medida del desplazamiento.....	141
4.4.3. Resultados experimentales .....	144
4.4.4. Resultados numéricos.....	147
4.5. INFLUENCIA DE LA ENERGÍA DE IMPACTO EN LOS RESULTADOS DEL ENSAYO DE FLEXIÓN DINÁMICA .....	156
4.5.1. Planteamiento del estudio .....	157
4.5.2. Resultados del estudio.....	157
 <b>5. TOLERANCIA AL DAÑO A FLEXIÓN.....</b>	 <b>165</b>
5.1. INTRODUCCIÓN .....	165
5.2. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL.....	167
5.2.1. Material empleado .....	167
5.2.2. Generación de daño .....	168
5.2.3. Evaluación del daño .....	172
5.2.4. Resistencia residual a flexión.....	176
5.3. RESULTADOS .....	180
5.3.1. Ensayos de generación de daño .....	180
5.3.2. Evaluación del daño .....	183
5.3.3. Propiedades residuales a flexión .....	188

<b>6. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO .....</b>	<b>195</b>
6.1.    RESUMEN Y CONCLUSIONES .....	195
6.2.    TRABAJOS FUTUROS.....	198
<b>PUBLICACIONES RELACIONADAS.....</b>	<b>201</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>203</b>
<b>ANEJO A. ECUACIONES CONSTITUTIVAS DE LA LÁMINA.....</b>	<b>213</b>
<b>ANEJO B. MÉTODOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>215</b>
<b>ANEJO C. DISPOSITIVO DE ENSAYO DE FLEXIÓN DINÁMICA.....</b>	<b>219</b>

# **CAPÍTULO 1**

## **INTRODUCCIÓN**

### **1.1. Motivación**

La utilización de elementos estructurales fabricados con materiales compuestos ha tenido un crecimiento constante durante las últimas décadas, siendo en las industrias aeronáutica y aeroespacial donde mayor aplicación y desarrollo han tenido, debido a que aviones, lanzaderas espaciales y satélites son estructuras en las que el peso es un factor clave. En estas aplicaciones, una pequeña disminución en el peso total de la estructura puede implicar una disminución muy importante en los costes debido al ahorro de combustible, por este motivo los coeficientes de seguridad suelen estar muy acotados. En los últimos años, sin embargo, todas las industrias han desarrollado una especial preocupación por el medioambiente y el peso de cualquier estructura se ha convertido en un factor crítico en el ahorro energético. El empleo de materiales compuestos, por tanto, se ha extendido en muchos campos de la ingeniería (automoción, naval, construcción) debido a su elevada resistencia y rigidez específica, y a un excelente comportamiento frente a fatiga y corrosión (Mangalgiri, 1999).

Entre los distintos tipos de materiales compuestos existentes los más empleados son los materiales compuestos de tipo laminado que están constituidos por el apilamiento de láminas delgadas. Estos materiales poseen unas altas propiedades mecánicas y habitualmente están constituidos por una matriz polimérica (epoxi, poliéster, vinilester, etc.) reforzada con fibras continuas (carbono, aramida, vidrio, boro, etc.).

Muchos componentes estructurales fabricados con materiales compuestos de tipo laminado, tales como palas de aerogeneradores, rotores de helicópteros, brazos de robots, ejes de transmisión, álabes de turbinas, etc. (figura 1.1), están formados por elementos tipo viga sometidos a cargas que originan principalmente esfuerzos de flexión (Demakos, 2003). En numerosas ocasiones, estas cargas tienen carácter dinámico, por ejemplo las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre la pala de un aerogenerador, por lo que conocer la respuesta dinámica de los mismos debe ser un aspecto a considerar en el proceso de diseño.

Para estudiar el comportamiento estructural de elementos tipo viga los modelos simplificados son unas herramientas muy útiles que permiten obtener resultados bastante precisos con un bajo coste computacional. Son una técnica muy empleada en los procesos de optimización, puesto que permiten evaluar de una forma muy simple la influencia de diferentes parámetros en la respuesta global de la estructura. Cuando estos elementos estructurales están fabricados con materiales compuestos de tipo laminado, en el proceso de modelización es necesario considerar una serie de características específicas de los laminados: elevada anisotropía, especial sensibilidad respecto a las tensiones de cortadura interlaminar, posible existencia de fenómenos de acoplamiento entre esfuerzos (flexión-torsión, tracción-torsión, tracción-flexión, etc.) que obligan al uso de modelos más complejos que en el caso de materiales isótropos (Reddy, 1997). Es necesario, por tanto, el desarrollo de modelos simplificados que consideren el efecto de estas características de los laminados y que sean capaces de estimar con



precisión la respuesta global de la estructura frente a cargas tanto estáticas como dinámicas.



a)

b)



c)



d)

Figura 1.1. Elementos estructurales que se pueden modelizar como vigas: a) palas de un aerogenerador, b) palas del rotor de un autogiro, c) brazo de un robot articulado, d) manillar de bicicleta de competición.

Para predecir la rotura de una viga con los coeficientes de seguridad empleados en las industrias aeronáutica y aeroespacial es necesario conocer con precisión el estado tensional en puntos concretos de la estructura. Los modelos simplificados son de gran utilidad para describir el comportamiento global de una estructura,

sin embargo, para conocer el estado tensional en un punto concreto de la misma es preciso recurrir a técnicas con un mayor coste computacional como las herramientas numéricas. Si la viga está fabricada con materiales compuestos de tipo laminado es necesario, además, considerar los diferentes modos de fallo que pueden presentar estos materiales como la rotura de fibras, la rotura de la matriz, la delaminación o el despegue entre fibra y matriz. El proceso de rotura es especialmente complejo cuando varios modos de fallo aparecen al mismo tiempo. Para que los modelos numéricos sean capaces de simular adecuadamente el fallo de una viga de material compuesto de tipo laminado, sería necesario disponer de un modelo de comportamiento mecánico de material adecuado que considere los diferentes modos de fallo que pueden aparecer.

Por otro lado, además de las cargas de diseño, los elementos estructurales citados pueden estar sometidos a diferentes tipos de impacto, bien durante su vida en servicio bien durante las operaciones de montaje y mantenimiento. Pueden ser impactos de alta velocidad como por ejemplo, los producidos por basura espacial sobre un satélite en órbita o una lanzadera espacial; de velocidades medias, como las colisiones de pájaros sobre aviones en las maniobras de despegue y aterrizaje; o de velocidades bajas, como el caso de la caída de una herramienta en las operaciones de mantenimiento o montaje.

De las diversas causas que producen daño en una estructura, el impacto es generalmente reconocido como la condición de carga más severa para los materiales compuestos de tipo laminado (Hawyes et al., 2001). Los materiales compuestos de tipo laminado son especialmente sensibles a los impactos de baja velocidad puesto que con frecuencia se producen delaminaciones, un tipo de daño interno que consiste en la falta de continuidad entre dos láminas contiguas provocando que dejen de trabajar solidariamente. Las delaminaciones generalmente no son visibles en la superficie impactada y pueden pasar desapercibidas en una inspección visual de rutina, quedando en servicio piezas

dañadas previamente. En estos casos es necesario recurrir a técnicas especiales de análisis de inspección no destructiva como los ultrasonidos o las radiografías. En muchas situaciones, el nivel de impacto para el cual se produce un daño visible es mucho mayor que el nivel que produce una pérdida significativa de propiedades mecánicas (Delfosse et al., 1995). Las delaminaciones, además, pueden crecer bajo ciclos de carga alternante, lo cual es muy común en cualquier componente estructural.

Debido a la posible existencia de estos daños internos, es necesario llevar a cabo estudios de tolerancia al daño frente a impacto de los componentes estructurales fabricados con estos materiales. Los estudios de tolerancia al daño sobre vigas de tipo laminado deben abordar dos problemas fundamentales, por una parte, deben estudiar la resistencia de las vigas frente a los diferentes impactos que puedan sufrir y, por otra parte, deben estimar si la viga puede seguir cumpliendo su función estructural tras el impacto. En la primera fase del estudio, es necesario analizar los impactos sufridos por la viga estimando la cantidad de energía absorbida por la viga y los mecanismos de daño que han actuado para absorber dicha energía. Cada uno de los distintos modos de fallo produce un daño diferente en el material alterando, también de forma distinta, las propiedades del laminado. En la segunda fase del estudio, se deben estimar las propiedades mecánicas residuales del elemento estructural. En el caso de una viga diseñada para soportar esfuerzos de flexión, es necesario evaluar estas propiedades frente a cargas que generen esos mismos esfuerzos. Sin embargo, la mayoría de los investigadores utilizan la técnica de compresión después de impacto para estudiar las propiedades residuales ya que se produce un estado tensional muy sensible al daño (Abrate, 1998).

## 1.2. Objetivos

El objetivo global de esta tesis doctoral es analizar la respuesta de elementos estructurales de tipo viga fabricados con materiales compuestos laminados sometidos a esfuerzos de flexión dinámicos producidos por impactos de baja velocidad. Para cumplir con este objetivo global se han planteado tres objetivos parciales:

- Desarrollo de un modelo simplificado que sea capaz de predecir con precisión los desplazamientos y los giros dinámicos producidos en una viga de tipo laminado cuando está sometida a cargas impulsivas, considerando la influencia de las tensiones de cortadura interlaminar y la existencia de fenómenos de acoplamiento entre esfuerzos de flexión y torsión.
- Implementación en un código de elementos finitos de un modelo de comportamiento mecánico para materiales compuestos de tipo laminado que considere los distintos mecanismos de daño para la simulación de impactos sobre vigas. Este objetivo incluye la validación del modelo mediante ensayos de flexión dinámica y su utilización en el estudio en profundidad del ensayo de flexión dinámica.
- Análisis de la tolerancia al daño a flexión de vigas de material compuesto de tipo laminado, evaluando la influencia del tipo de impacto realizado y de la energía del mismo en las propiedades mecánicas residuales y en la extensión del daño.

### 1.3. Aportaciones originales

Como resultado del trabajo desarrollado para la consecución de los anteriores objetivos, pueden enumerarse las siguientes aportaciones originales de esta tesis doctoral:

- Aplicación y validación del método de las funciones de influencia al cálculo de los desplazamientos y los giros dinámicos en vigas de tipo laminado considerando la influencia de las tensiones de cortadura interlaminar y el acoplamiento entre los esfuerzos de flexión y torsión.
- Análisis del fenómeno de acoplamiento flexión-torsión en laminados en función de la secuencia de apilamiento y de las constantes elásticas de la lámina.
- Validación de un modelo de comportamiento mecánico para laminados basado en el criterio de Hou para la simulación numérica de impactos de baja velocidad que generen esfuerzos de flexión sobre vigas de tipo laminado.
- Diseño de un dispositivo experimental para la realización de ensayos de flexión dinámica, incluyendo un dispositivo para la medida del desplazamiento vertical de la sección central de la probeta mediante un transductor óptico.
- Verificación de la técnica óptima para la medida del desplazamiento vertical en ensayos de flexión dinámica en torre de caída.
- Estudio de la influencia del modo de generar el daño en la tolerancia al daño a flexión para vigas de tipo laminado determinado los valores de resistencia y rigidez residual bajo cargas de flexión.

## 1.4. Contenido

Esta tesis doctoral se ha dividido en seis capítulos, el primero de los cuales es esta introducción.

En el segundo capítulo se recoge una revisión bibliográfica de los estudios más relevantes realizados por otros autores en relación con los problemas planteados.

El tercer capítulo contiene el desarrollo de un modelo analítico para calcular los desplazamientos y los giros dinámicos producidos en una viga de material compuesto de tipo laminado con acoplamiento flexión torsión mediante el método de las funciones de influencia.

En el cuarto capítulo se presenta un modelo de comportamiento mecánico implementado en el código comercial de elementos finitos ABAQUS a través de una subrutina de usuario para la simulación de impactos sobre vigas. También se expone una validación del modelo comparando los resultados que proporciona en la simulación del ensayo de flexión dinámica con resultados experimentales, así como un análisis del ensayo de flexión dinámica realizado con el modelo numérico.

Se ha realizado un estudio de la tolerancia al daño de vigas de tipo laminado sometidas a esfuerzos de flexión, variando el tipo de carga que se recoge en el quinto capítulo.

Las principales conclusiones y las posibles líneas de trabajo futuro se exponen en el sexto capítulo.

Finalmente se incluyen las referencias bibliográficas utilizadas para la realización de esta tesis y, en varios anejos, se muestran detalles específicos del trabajo realizado.

# **CAPÍTULO 2**

## **ANTECEDENTES**

### **2.1. Introducción**

Un material compuesto se puede definir como una combinación, a nivel macroscópico, de dos o más materiales para obtener otro con mejores propiedades. En la mayoría de los casos se utilizan con fines estructurales combinando dos componentes, una matriz y un refuerzo. La matriz debe distribuir la carga y soportar al refuerzo, mientras este último aporta la rigidez y la resistencia al compuesto.

La utilización de los materiales compuestos naturales por parte del hombre se remonta a las primeras herramientas de hueso y madera. Una de las características de las construcciones realizadas con madera es la disposición adecuada del material para que se aprovechen las mejores propiedades mecánicas de la madera en dirección de las fibras. También existen referencias muy antiguas de la acción de combinar varios materiales para obtener otro con mejores propiedades, como en el antiguo Egipto, donde reforzaban con paja los ladrillos de arcilla para mejorar su resistencia. En otras regiones, aún sin existir una civilización tan

avanzada como la egipcia, también se utilizaban materiales compuestos para la construcción desde épocas muy remotas, por ejemplo, en Inglaterra en torno al 1500 a.c. se empleaba una mezcla de estiércol y barro reforzada con ramas para la construcción de los muros de las casas (Armstrong et al., 2005). Ya en el siglo XIX se comenzaron a emplear barras de hierro para reforzar la mampostería de algunas construcciones, esta combinación se puede considerar un precursor del hormigón armado (Daniel y Ishai, 1994).

Los materiales compuestos se pueden clasificar en tres grandes grupos (Hull, 1987): materiales compuestos naturales (madera, bambú, huesos...), materiales macrocompuestos (hormigón armado, acero galvanizado) y materiales microcompuestos (aleaciones metálicas, termoplásticos endurecidos...). Dentro de este último grupo estarían incluidos los materiales compuestos de tipo laminado, constituidos por una matriz polimérica y refuerzos de fibras de alta resistencia como carbono, vidrio o kevlar.

Algunas de las fibras utilizadas en los laminados son conocidas desde muy antiguo, por ejemplo, los egipcios ya descubrieron la fibra de vidrio, pero las primeras matrices poliméricas no aparecen hasta el siglo XX, de forma que el desarrollo de los materiales compuestos avanzados ha sido paralelo al de las matrices (Miravete, 2000). En 1907, el químico belga Leo Baekeland obtuvo por primera vez una resina termoestable, la bakelita. En las primeras décadas del siglo XX se van descubriendo las matrices más empleadas hoy día como las fenólicas, las poliéster, las viniléster o las epoxi.

El mayor impulsor de los materiales de tipo laminado ha sido la industria aeronáutica, con ella surge la necesidad de nuevos materiales que permitan construir elementos estructurales con elevados requerimientos de resistencia y rigidez específica. En los años sesenta se comienzan a utilizar fibras avanzadas como carbono, boro o aramida en la construcción de aeronaves. En la segunda mitad del siglo XX los materiales compuestos de tipo laminado se extienden a



diversos sectores como la industria naval, la automovilística o la deportiva. Ya en el siglo XXI, ante el reto del cambio climático, los materiales compuestos avanzados suponen una importante herramienta para mejorar la eficiencia energética gracias a que permiten la construcción de estructuras y vehículos más ligeros con el consiguiente ahorro de combustible.

Existe una gran diversidad de materiales compuestos de tipo laminado en los que se combinan diferentes matrices y refuerzos, pero su construcción a base de refuerzos embebidos en láminas superpuestas les otorgan ciertas características comunes:

- Se caracterizan por una elevada anisotropía que facilita la colocación de los refuerzos en las direcciones con mayores requerimientos mecánicos.
- Poseen una elevada resistencia y rigidez específica que permiten la construcción de estructuras ligeras.
- En general, tienen un buen comportamiento frente a fatiga y corrosión.
- El hecho de construirse mediante la superposición de diferentes láminas les hace muy sensibles a las tensiones de cortadura interlaminar.
- Presentan diferentes mecanismos de daño debido a su heterogeneidad.
- Son materiales más frágiles que los metálicos.
- Facilitan la construcción de grandes piezas disminuyendo el número total de elementos de la estructura.

## **2.2. Modelos simplificados del comportamiento a flexión de vigas de material compuesto de tipo laminado**

En numerosas ocasiones los materiales compuestos de tipo laminado forman parte de estructuras tipo viga sometidas a esfuerzos de flexión. Para modelizar el comportamiento de este tipo de vigas es necesario considerar una serie de características específicas de estos materiales. Hay que tener en cuenta, en primer lugar, que las fibras de refuerzo tienen una dirección preferencial dentro de cada lámina, este hecho implica que las propiedades mecánicas dependen de la dirección de aplicación de la carga y de la secuencia de apilamiento. El diseño con estos materiales anisótropos, permite la optimización de los elementos estructurales mediante la orientación de las fibras en las direcciones de mayor sollicitación, pero también supone un aumento en la complejidad de la modelización. Esta anisotropía puede implicar también la aparición de fenómenos de acoplamiento entre esfuerzos (flexión-torsión, flexión-tracción, torsión-tracción, etc) que es necesario considerar.

Como consecuencia de la configuración de los laminados, todas las fibras de refuerzo se encuentran en el plano de la lámina, por lo tanto, la resistencia y la rigidez del laminado son mucho mayores en dicho plano que en dirección perpendicular. Las propiedades mecánicas del laminado en dirección perpendicular al plano de la lámina están determinadas por las propiedades de la matriz y por el grado de adhesión entre las distintas láminas, por lo tanto, puede ser necesario emplear modelos que consideren el efecto de las tensiones de cortadura interlaminar en su formulación, al estudiar el comportamiento a flexión de una viga fabricada con laminados, debido a que las propiedades mecánicas de la matriz son inferiores a las del refuerzo (Reddy, 1997).

Para estudiar el comportamiento a flexión de una estructura fabricada con materiales de tipo laminado existen diversas aproximaciones:

- Teorías de capa única equivalente. Partiendo de la Elasticidad tridimensional anisótropa y haciendo una serie de hipótesis, el problema tridimensional se reduce a uno bidimensional, en el caso de una placa, y a uno unidimensional, en el caso de una viga.
- Teorías tridimensionales. Cada lámina se modeliza como un sólido tridimensional asumiendo que los desplazamientos son continuos, aunque no necesariamente sus derivadas espaciales.

Cuando el objetivo principal del estudio es determinar la respuesta global de la estructura, por ejemplo, conocer el desplazamiento, la carga de pandeo global o las frecuencias y modos propios de vibración, las teorías de capa única equivalente proporcionan soluciones suficientemente precisas para laminados de pequeño espesor. Si, por el contrario, se requiere conocer el campo tensional en algún punto concreto o el laminado es grueso, es necesario recurrir a teorías tridimensionales (Carvelli y Savoia, 1997).

La teoría de capa única equivalente más sencilla, denominada teoría del laminado (Whitney y Leissa, 1969), permite estudiar adecuadamente los desplazamientos y las tensiones en laminados delgados y está basada en las hipótesis de Kirchhoff. Según estas hipótesis las rectas perpendiculares al plano medio antes de la deformación deben:

- Permanecer rectas después de la deformación.
- Mantener su longitud constante.
- Seguir siendo perpendiculares al plano medio.

Las dos primeras hipótesis implican que el desplazamiento transversal del plano medio es independiente de la coordenada transversal a dicho plano y que la deformación transversal es nula. La tercera hipótesis implica que no hay

deformación de cortadura transversal. El campo de desplazamientos según estas hipótesis se puede expresar como:

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (2.1)$$

donde  $u$ ,  $v$ ,  $w$  son los desplazamientos a lo largo de la coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivamente,  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  son los desplazamientos correspondientes a un punto situado en el plano medio, habiéndose definido el eje  $z$  perpendicular al plano del laminado y con origen en el plano medio, figura 2.1.

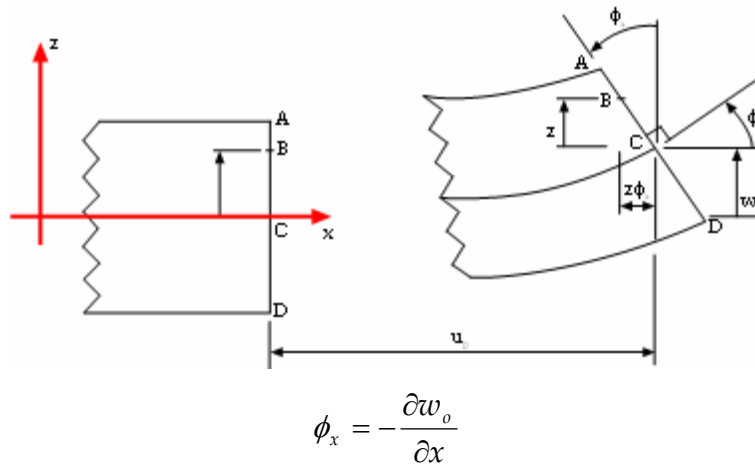


Figura 2.1. Geometría deformada de la sección de una viga en la teoría del laminado.

Dada la baja resistencia y rigidez a cortadura interlaminar de los materiales compuestos de tipo laminado, puede requerirse el empleo de modelos más complejos que consideren en su formulación el efecto de las tensiones de cortadura. La teoría más sencilla que considera las deformaciones de cortadura es la teoría de cortadura de primer orden.

En la teoría de cortadura de primer orden se relajan las hipótesis de Kirchhoff eliminando la tercera de ellas, es decir, las rectas perpendiculares al plano medio siguen siendo rectas y mantienen su longitud constante, pero no tienen por qué

permanecer perpendiculares a dicho plano después de la deformación. El campo de desplazamientos queda como sigue:

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (2.2)$$

donde  $\phi_x$  y  $\phi_y$  son el giro de la sección respecto de los ejes  $y$  y  $x$  respectivamente, figura 2.2.

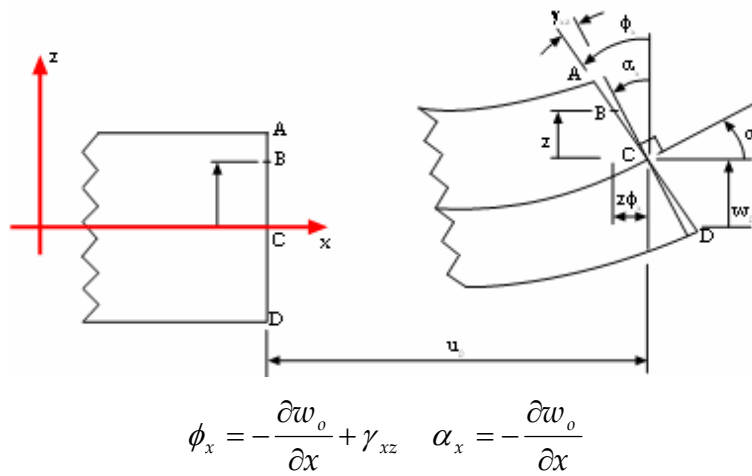


Figura 2.2. Geometría deformada de la sección de una viga en la teoría de cortadura de primer orden.

En este campo de desplazamientos, una línea perpendicular al plano  $xy$  dejará de serlo después de la deformación, ya que el giro  $\phi_x$  que experimenta es distinto al del plano medio,  $\alpha_x$ . Se asume una deformación de cortadura constante a lo largo del espesor que produce un giro  $\gamma_{xz}$ , añadido al producido por el momento flector  $\alpha_x$ , figura 2.2.

También se han desarrollado teorías de cortadura de alto orden (Levinson, 1980; Muthy, 1981) en las que es posible definir el campo de desplazamientos en función de la coordenada  $z$ . Debido a la complejidad algebraica y al elevado coste computacional, estas teorías normalmente no superan el tercer orden. Una de las teorías de alto orden más empleadas es la teoría de tercer orden de Reddy (1984), en este caso además de eliminar la tercera hipótesis de Kirchhoff se relaja la

primera: las rectas perpendiculares al plano medio dejan de ser rectas tras la deformación. De este modo, el desplazamiento es una función cúbica de la coordenada  $z$ .

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z\phi_x(x, y, t) - z^3\left(\frac{4}{3h^2}\right)\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z\phi_y(x, y, t) - z^3\left(\frac{4}{3h^2}\right)\left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (2.3)$$

siendo  $h$  el espesor del laminado.

A pesar de que las teorías de alto orden proporcionan resultados más precisos que la teoría de cortadura de primer orden, el elevado coste computacional de las primeras, frente la sencillez de la segunda hace que ésta sea más empleada. En análisis dinámicos, el coste computacional de las teorías de alto orden hace que su aplicación sea muy difícil (Meunier, 2001).

### 2.2.1. Teoría de cortadura de primer orden

A continuación, se describe brevemente la teoría de cortadura de primer orden, también llamada en el caso de sólidos isótropos, teoría de Reissner-Mindlin para placas y teoría de Timoshenko para vigas.

Asumiendo el campo de desplazamientos anteriormente descrito, ecuación 2.2, el campo de deformaciones finitas (sin despreciar términos cuadráticos) queda como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \gamma_{xy} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - z \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \varepsilon_{zz} = 0 \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Las deformaciones se pueden dividir en deformaciones planas,  $\varepsilon^{(0)}$ , y en deformaciones producidas por los giros,  $\varepsilon^{(1)}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{array} \right\} + z \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

Para proceder al cálculo de los desplazamientos en función de los esfuerzos producidos por la carga, se puede emplear el principio de los trabajos virtuales. La versión en términos dinámicos del principio de los trabajos virtuales es:

$$\int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (2.6)$$

donde  $\delta U$  es la energía virtual de deformación,  $\delta V$  el trabajo virtual realizado por las fuerzas aplicadas y  $\delta K$  la energía cinética virtual. Las funciones  $\delta U$  y  $\delta K$  son integrales de volumen y la función  $\delta V$  es una integral de contorno.

Desarrollando las integrales de la ecuación 2.6 se obtiene una expresión del principio de los trabajos virtuales en función de las tensiones y deformaciones.

Al aplicar el principio de los trabajos virtuales las tensiones se integran a lo largo del espesor del laminado, dando lugar a los esfuerzos globales por unidad de longitud como se muestra a continuación:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (2.7)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (2.8)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} dz \quad (2.9)$$

Las hipótesis asumidas en la teoría de cortadura de primer orden, conducen a que las distribuciones de las tensiones de cortadura sean constantes a lo largo del espesor, lo que no se corresponde con la evidencia experimental. En una viga de sección rectangular de material isótropo y homogéneo, las tensiones de cortadura varían a lo largo del espesor de forma cuadrática, teniendo su valor máximo en el



plano medio y valor nulo en los extremos. En una viga de tipo laminado, dichas tensiones varían de forma cuadrática a lo largo del espesor de cada lámina.

Para ajustar los resultados de la teoría de cortadura de primer orden a los observados experimentalmente, se introduce un factor de cortante  $K$ . Para determinar el valor de  $K$  se compara una característica global de la viga, que generalmente es la energía de deformación, calculada mediante esta teoría y mediante la elasticidad tridimensional. La precisión que se consigue con la teoría de cortadura primer orden depende, por tanto, de la exactitud del factor de cortante empleado. Timoshenko (1921) propuso un factor de cortante de  $2/3$  para una sección rectangular de material isótropo, aunque posteriormente se ha aceptado que dicho factor debe valer  $5/6$ . Existen diferentes métodos para el cálculo del mencionado factor tal como se muestra en el siguiente apartado.

Volviendo al principio de los trabajos virtuales, sustituyendo las tensiones en función de los esfuerzos (ecuaciones 2.7-2.9) y las deformaciones en función de los desplazamientos (ecuación 2.4), se obtiene una expresión en función de los esfuerzos y desplazamientos virtuales:  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_0$ ,  $\delta \phi_x$  y  $\delta \phi_y$  (Reddy, 1997). Las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen igualando a cero de forma separada los coeficientes  $\delta u_0$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta w_0$ ,  $\delta \phi_x$  y  $\delta \phi_y$  en las integrales de volumen.

$$\begin{aligned}
 \text{Para } \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\
 \text{Para } \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \\
 \text{Para } \delta w_0 : \quad & \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N(w_0) + q = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\
 \text{Para } \delta \phi_x : \quad & \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = I_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\
 \text{Para } \delta \phi_y : \quad & \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y = I_2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

siendo:

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho_0 dz \quad (2.11)$$

$$N(w_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (2.12)$$

Con estas relaciones y las ecuaciones constitutivas de la lámina, recogidas en el anejo A, se llegan a las ecuaciones constitutivas del laminado, que para un laminado simétrico son las siguientes:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{xx}^{(0)} \\ \mathcal{E}_{yy}^{(0)} \\ \mathcal{E}_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_{xx}^{(1)} \\ \mathcal{E}_{yy}^{(1)} \\ \mathcal{E}_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \end{aligned} \quad (2.16)$$

siendo  $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$  el término correspondiente a la matriz de rigidez de la lámina  $k$  en ejes globales y  $z_k$  la coordenada vertical de la cara inferior de dicha lámina.

Asumiendo que las variables  $w_0$  y  $\phi_x$  son funciones únicamente de  $x$  y de  $t$  y que la viga trabaja sólo a flexión, no existen esfuerzos axiales ni de torsión, así como tampoco deformación en dirección  $y$ :

$$N_{xx} = N_{xy} = N_{yy} = M_{yy} = M_{xy} = Q_y = 0 \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} w_0 = w_0(x, t) \\ \phi_x = \phi_x(x, t) \\ \phi_y = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

El campo de desplazamientos (ecuación 2.2) se simplifica:

$$\begin{cases} u(x, z) = z\phi_x(x) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (2.19)$$

Quedando el campo de deformaciones (ecuación 2.4) como sigue:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{cases} \quad (2.20)$$

Introduciendo estos valores en las ecuaciones constitutivas (ecuaciones 2.14 y 2.15) se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} = d_{11} M_{xx} \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x = \frac{a_{55}}{K} Q \end{cases} \quad (2.21)$$

donde  $d_{11}$  y  $a_{55}$  son las componentes correspondientes a las matrices  $[d]$  y  $[a]$ , inversas de las matrices  $[D]$  y  $[A]$  respectivamente.

Empleando una nomenclatura más habitual en la Resistencia de Materiales quedaría:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} = \frac{M(x)}{E_{xx}^b I_{yy}} \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x = \frac{Q(x)}{KG_{xz}^b bh} \end{cases} \quad (2.22)$$

siendo:

$$\begin{aligned} M(x) &= b M_{xx} \\ Q(x) &= b Q_x \\ E_{xx}^b &= \frac{12}{d_{11} h^3} \\ G_{xz}^b &= \frac{1}{a_{55} h} \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde  $b$ ,  $h$  e  $I_{yy}$  son el ancho, el canto y el momento de inercia de la sección de la viga respectivamente.

Introduciendo estos esfuerzos en las ecuaciones de movimiento que no se anulan por las hipótesis anteriores (ecuación 2.10, para  $w_0$  y  $\phi_x$ ) y despreciando los esfuerzos axiales, se llega a una expresión más habitual en la Resistencia de Materiales.

$$\begin{aligned} KG_{xz}^b bh \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + \hat{q} &= \hat{I}_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\ E_{xx}^b I_{yy} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - KG_{xz}^b bh \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) &= \hat{I}_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde:

$$\begin{aligned} \hat{q} &= b q \\ \hat{I}_0 &= b I_0 \\ \hat{I}_2 &= b I_2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Existen diversas técnicas para resolver estas ecuaciones, en el apartado 2.2.3 se presentan algunas de ellas de forma resumida.

### **2.2.1.1. Determinación del factor de cortante en laminados**

Existen diferentes métodos para calcular el factor de corrección de cortadura  $K$  en materiales homogéneos e isotrópicos en función de la geometría de la sección y de las propiedades del material. Se han calculado coeficientes de corrección en función del coeficiente de Poisson de la sección (Cowper, 1966) o en función de la geometría de la sección y del coeficiente de Poisson (Hutchinson, 2001). El método de Cowper fue aplicado a materiales homogéneos con propiedades ortótropas (Dharmajan y McCutchen, 1973) y el método de Hutchinson (2001) fue aplicado a materiales homogéneos con propiedades anisótropas (Puchegger et al., 2003).

Otros autores han desarrollado métodos específicos para el cálculo del factor de cortante en materiales compuestos que tienen en cuenta sus propiedades específicas (Whitney, 1973; Vinson y Sierakowski, 1986; Madabhusi-Raman y Davalos, 1996). Para estimar un factor de corrección de cortadura con precisión en laminados es necesario calcularlo en función de las propiedades elásticas y de la orientación de cada lámina. A continuación se muestran algunos de estos métodos para estimar el factor de cortante en vigas de material compuesto de tipo laminado.

#### **Método clásico de Timoshenko**

Muchos investigadores aceptan que el factor de cortante de  $5/6$  para materiales isotrópicos y homogéneos se puede emplear también en materiales de tipo laminado (Kapania y Raciti, 1989; Reddy, 1997). En este caso, el factor de cortante se determina igualando la energía de deformación debida a las tensiones de cortadura constantes, según la teoría de cortadura de primer orden multiplicadas por el mencionado factor de corrección (ecuación 2.9) a la energía de deformación calculada con la teoría de Resistencia de Materiales, que supone una variación cuadrática de las tensiones de cortadura a lo largo del espesor.

$$\sigma_{xz}^t = \frac{Q_{xz}}{K \cdot A} \quad (2.26)$$

El factor de corrección de cortadura  $K$  se aplica a la sección de modo que se tiene una sección de cortadura  $A_c = K \cdot A$  menor de la real. La energía de deformación debida a esta tensión es, por tanto, la siguiente:

$$U_s^t = \frac{1}{2 \cdot G_{xz}} \int_A (\sigma_{xz}^t)^2 dA = \frac{Q^2}{2 \cdot G_{xz} \cdot K \cdot A} \quad (2.27)$$

En el caso de una viga homogénea de sección rectangular, la distribución de la tensión de cortadura a lo largo del espesor sigue una ley cuadrática y la energía de deformación es:

$$U_s^r = \frac{1}{2 \cdot G_{xz}} \int_A (\sigma_{xz}^r)^2 dA = \frac{3 \cdot Q^2}{5 \cdot G_{xz} \cdot A} \quad (2.28)$$

Igualando las dos energías de deformación se obtiene el valor del coeficiente de corrección de cortadura  $K$  para una sección rectangular:

$$U_s^r = U_s^t \quad \Rightarrow \quad K = 5/6 \quad (2.29)$$

### Método clásico modificado

Este método, propuesto por Vinson y Sierakowski (1986), supone que las deformaciones de cortadura interlaminar en un material compuesto de tipo laminado siguen una ley cuadrática como predice la teoría de Resistencia de Materiales para materiales isótropos, de este modo las tensiones de cortadura se anulan en los extremos, como se comprueba experimentalmente (Barbero, 1999). Para que las deformaciones sigan una ley cuadrática, se multiplican por una función cuadrática que tiene valor nulo en los extremos y valor máximo unitario en el plano medio.

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} \cdot \left( 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right) - \frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (2.30)$$

Al integrar las tensiones de cortadura a lo largo del espesor, para calcular los esfuerzos de cortadura, aparece un nuevo factor que depende de la coordenada vertical  $z$  y que afecta al cálculo de los coeficientes de la nueva matriz de rigidez a cortadura. Al igual que en el caso anterior, se utilizar un factor de corrección  $K^m$  para ajustar la amplitud de la deformación.

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K^m \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} dz = K^m \sum_{k=1}^N \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \begin{bmatrix} \overline{Q_{44}} & \overline{Q_{45}} \\ \overline{Q_{45}} & \overline{Q_{55}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} \left( 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right) dz \quad (2.31)$$

A diferencia del método anterior, en este caso el factor de corrección se incluye en el cálculo de la matriz de rigidez a cortadura definiendo la nueva matriz de rigidez a cortadura como:

$$\begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} = K^m \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \begin{bmatrix} \overline{Q_{44}} & \overline{Q_{45}} \\ \overline{Q_{45}} & \overline{Q_{55}} \end{bmatrix} \cdot \left( 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right) \cdot dz \quad (2.32)$$

donde  $K^m$  es un factor de corrección que se calcula igualando las energías de deformación de cortadura.

$$H_{ij} = \frac{5}{4} \sum_{k=1}^N \overline{Q}_{ij}^{(k)} \left[ e - \frac{4}{h^2} \left( e \cdot \bar{z}_k^2 + \frac{e^3}{12} \right) \right] \quad (2.33)$$

siendo  $e$  el espesor de una lámina y  $\bar{z}_k$  la coordenada  $z$  media de cada lámina.

La nueva ecuación constitutiva del laminado, en este caso, es:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

### Método de Madabhushi-Raman y Davalos

El método propuesto por estos autores (Madabhushi-Raman y Davalos, 1996), depende de las constantes elásticas de la lámina y de la secuencia de apilamiento. La matriz de rigidez de laminado a cortadura tiene diferentes factores de corrección en cada una de las direcciones:

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1^2 A_{44} & k_1 k_2 A_{45} \\ k_1 k_2 A_{45} & k_1^2 A_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

La ecuación que relaciona la deformación angular interlaminar con el esfuerzo de cortadura sería:

$$\gamma_{xz} = \frac{Q_x}{k_1^2 \cdot \left( A_{55} - \frac{A_{45}^2}{A_{44}} \right)} = \frac{Q_x}{K \cdot \bar{F}} \quad (2.36)$$

siendo:

$$K = k_1^2$$

$$\bar{F} = \left( A_{55} - \frac{A_{45}^2}{A_{44}} \right) \quad (2.37)$$

Para determinar el valor del coeficiente de corrección de cortadura  $K$ , se calcula, en primer lugar, la energía de deformación de cortadura debida a las tensiones de cortadura obtenidas realizando un equilibrio de esfuerzos y después, se iguala a la energía equivalente obtenida a través de la ecuación constitutiva del laminado, ecuación 2.35, en la que se asume que la deformación de cortadura es constante a lo largo del espesor.

La ecuación de equilibrio interno, suponiendo que no existen fuerzas de volumen y que tan sólo existen variaciones de las variables estudiadas con respecto a las coordenadas longitudinal y vertical,  $x$  y  $z$ , sería:



$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2.38)$$

Integrando a través del espesor queda:

$$\sigma_{xz} = - \int_{-h/2}^z \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz \quad (2.39)$$

Sustituyendo  $\sigma_x$  por el valor que resulta de las ecuaciones constitutivas de cada lámina, anejo A, y, posteriormente, en función de los esfuerzos según las ecuaciones constitutivas del laminado (ecuaciones 2.13-2.15), se puede expresar la tensión de cortadura interlaminar en función del esfuerzo de cortadura, de las constantes de rigidez de la lámina y de la coordenada vertical z:

$$\sigma_{xz} = - \int_{-h/2}^z Q_x \cdot z \cdot (\overline{Q}_{11} d_{11} + \overline{Q}_{12} d_{12} + \overline{Q}_{16} d_{16}) dz \quad (2.40)$$

La energía de deformación producida por las tensiones de cortadura es:

$$\overline{U} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} \gamma_{xz} dz = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_{xz}^2}{\left( \overline{Q}_{55} - \frac{\overline{Q}_{45}^2}{\overline{Q}_{44}} \right)} dz \quad (2.41)$$

Sustituyendo la tensión de cortadura  $\sigma_{xz}$  por su valor, según la teoría de cortadura de primer orden, ecuación 2.9, y según el equilibrio de esfuerzos en el plano xz, ecuación 2.40, quedan dos expresiones para la energía de deformación.

- Energía de deformación según la teoría de cortadura de primer orden:

$$\overline{U}_{tc} = \frac{1}{2} \frac{Q_x^2}{K \cdot \left( A_{55} - \frac{A_{45}^2}{A_{44}} \right)} \quad (2.42)$$

- Energía de deformación según el equilibrio de esfuerzos en el plano  $xz$ :

$$\overline{U}_{ef} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Q_x^2 \cdot \left[ \int_{-h/2}^Z z \cdot (\overline{Q}_{11}d_{11} + \overline{Q}_{12}d_{12} + \overline{Q}_{16}d_{16}) dz \right]^2}{\left( \overline{Q}_{55} - \frac{\overline{Q}_{45}^2}{\overline{Q}_{44}} \right)} dz \quad (2.43)$$

Igualando estas dos expresiones de la energía de deformación, se obtiene el valor del coeficiente de corrección de cortadura:

$$K = \left[ \left( A_{55} - \frac{A_{45}^2}{A_{44}} \right) \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\left[ \int_{-h/2}^Z z \cdot (\overline{Q}_{11}d_{11} + \overline{Q}_{12}d_{12} + \overline{Q}_{16}d_{16}) dz \right]^2}{\left( \overline{Q}_{55} - \frac{\overline{Q}_{45}^2}{\overline{Q}_{44}} \right)} dz \right]^{-1} \quad (2.44)$$

Integrando lámina a lámina a lo largo del espesor, se puede expresar el resultado en forma de sumatorios:

$$K = \left[ \left( A_{55} - \frac{A_{45}^2}{A_{44}} \right) \sum_{i=1}^{2N} \frac{1}{\left( \overline{Q}_{45}^i - \frac{\overline{Q}_{45}^{i-2}}{\overline{Q}_{45}^i} \right)} \left[ P_i(z_{i+1} - z_i) + \frac{V_i}{3}(z_{i+1}^3 - z_i^3) + \frac{X_i}{5}(z_{i+1}^5 - z_i^5) \right] \right]^{-1} \quad (2.45)$$

donde:

$$\begin{aligned} P_i &= U_i^2 + \frac{J_i^2 z_i^4}{4} + U_i J_i z_i^2 \\ V_i &= U_i J_i + \frac{J_i^2 z_i^2}{2} \\ X_i &= \frac{J_i^2}{4} \\ U_i &= \sum_{m=1}^{i-1} \frac{J_m}{2} (z_{m+1}^2 - z_m^2) \\ J_i &= \overline{Q}_{11}^i d_{11} + \overline{Q}_{12}^i d_{12} + \overline{Q}_{16}^i d_{16} \end{aligned} \quad (2.46)$$

### **2.2.2. Acoplamiento de esfuerzos de flexión y torsión**

La anisotropía de los materiales compuestos de tipo laminado puede provocar una serie de fenómenos que afectan al comportamiento a flexión de vigas constituidas por estos materiales y que se deben considerar en la modelización. Cabe destacar la posible aparición de acoplamientos entre esfuerzos, por ejemplo, en los laminados no simétricos se produce un acoplamiento entre los esfuerzos de flexión y de tracción.

El fenómeno de acoplamiento entre los esfuerzos de flexión y torsión puede aparecer en una viga por dos motivos principalmente, la geometría de la sección o la anisotropía del material. En muchas estructuras tipo viga, este fenómeno es producido por la geometría de la sección, por ejemplo, en la sección de la pala de un aerogenerador. También se puede producir este acoplamiento entre esfuerzos de flexión y de torsión en vigas con secciones de pared delgada. Sin embargo, en las vigas de materiales compuestos de tipo laminado se puede producir este acoplamiento aunque la sección sea rectangular, en estos casos el acoplamiento se produce por la naturaleza anisótropa del laminado y aparece cuando en la secuencia de apilamiento hay láminas con orientación distinta a  $0^\circ$  o  $90^\circ$ , incluso si la secuencia de apilamiento es simétrica. Este tipo de acoplamiento de esfuerzos es muy frecuente y puede ser conveniente en ciertos elementos estructurales, por ejemplo, en palas de aerogeneradores o en rotores de helicópteros donde es posible controlar la respuesta aeroelástica de la estructura mediante este acoplamiento (Chandra et al., 1990), reduciendo las vibraciones y aumentando tanto la estabilidad como la eficiencia aerodinámica.

Este fenómeno es la causa de que en vigas sometidas a cargas que, en principio, sólo deberían producir esfuerzos de flexión, aparezcan también esfuerzos o giros de torsión. De la misma forma, pueden aparecer esfuerzos o giros de flexión aunque la carga aplicada sea únicamente de torsión. En cualquiera de los casos, es

necesario que los modelos empleados en el diseño sean capaces de predecir dichos acoplamientos.

El caso más estudiado es el del acoplamiento flexión-torsión producido por la geometría de la sección, por ejemplo, Panda y Chopra (1987) estudiaron la respuesta dinámica de una pala de un rotor, constituida por materiales compuestos, en la que se buscaba la estabilidad aeroelástica por medio del acoplamiento que produce la geometría de la sección entre los esfuerzos de torsión y de flexión.

También se produce un acoplamiento flexión-torsión en las secciones de pared delgada, Chandra et al. (1990) calcularon los desplazamientos en vigas de sección de pared delgada constituidas por fibra de carbono en matriz epoxi, comparando resultados experimentales con los obtenidos mediante un modelo de elementos finitos y un modelo analítico en el que se consideran esfuerzos de flexión y de torsión, además del acoplamiento entre ambos. Dancila y Armanios (1998), mediante un modelo analítico para vigas de sección de pared delgada de laminados, calcularon las frecuencias propias considerando los acoplamientos flexión-torsión y tracción-torsión, los resultados fueron validados con un modelo de elementos finitos. Li et al. (2003) analizaron la respuesta dinámica de vigas de Timoshenko de pared delgada, considerando cargas axiales y acoplamiento flexión-torsión. En este estudio las vigas de material compuesto de tipo laminado son sometidas a varios tipos de cargas dinámicas concentradas y distribuidas.

Este acoplamiento es mayor cuando la sección de pared delgada es abierta, Lee y Kim (2002) desarrollaron un modelo de elementos finitos unidimensional para el cálculo de las frecuencias y los modos propios de vigas de materiales compuestos con sección abierta de pared delgada.

El problema del acoplamiento flexión-torsión para secciones rectangulares está menos estudiado, en este caso el acoplamiento se produce por la naturaleza anisótropa del material. Barnejee (2001) calculó las frecuencias y modos propios

considerando acoplamiento flexión-torsión en vigas en voladizo, modelizando estructuras tipo viga en las que este fenómeno aparece con frecuencia tales como alas y palas de rotores.

Hashemi y Richard (2000) analizaron, mediante la técnica de los elementos finitos, las vibraciones libres de una estructura tipo sometida a una combinación de esfuerzos de flexión y torsión. Se trataba de una pala de helicóptero en la que se consideraron que la carga aerodinámica está uniformemente distribuida en toda la superficie, de esta forma, no sólo aparecen esfuerzos de flexión sino también de torsión dado que el centro aerodinámico no coincide con el centro de esfuerzos cortantes de la sección.

Las ecuaciones características de una viga en la que se consideran esfuerzos de flexión, cortadura (según la teoría de cortadura de primer orden) y de torsión, además del acoplamiento de esfuerzos de flexión y torsión, son las siguientes (Teh y Huang, 1980):

$$\begin{aligned}
 KG_{xz}^b b h \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + \hat{q} &= \hat{I}_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\
 E_{xx}^b I_{yy} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + K_T \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - KG_{xz}^b b h \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) &= \hat{I}_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\
 K_T \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + G_T J \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - KG_{xz}^b b h \phi_y &= J \rho \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

donde  $G^T$  es la rigidez a torsión,  $K_T$  es el factor de acoplamiento flexión-torsión,  $J$  el momento de inercia de rotación de la sección y  $\phi_y$  el giro de torsión.

En numerosos estudios sobre el fenómeno flexión-torsión, se toman estas ecuaciones como punto de partida, suponiendo conocido el factor de acoplamiento  $K_T$  (Hashemi y Richard, 2000; Li et al., 2003). Es necesario continuar profundizando en el estudio del fenómeno de acoplamiento flexión-torsión en materiales de tipo laminado y tomar, como punto de partida para el análisis, las constantes elásticas de la lámina. De esta forma, se podría calcular el factor de

acoplamiento a partir de las propiedades elásticas de la lámina, del mismo modo que se hace con la rigidez aparente a flexión o a cortadura interlaminar.

### **2.2.3. Técnicas de resolución de las ecuaciones de movimiento de la viga**

Para resolver las ecuaciones de movimiento de una viga fabricada con materiales compuestos de tipo laminado, muchos autores emplean técnicas numéricas como el Método de los Elementos Finitos, el Método de Galerkin o el Método de los Elementos de Contorno. Subrahmanyam y Kaza (1987) emplearon el Método de Galerkin para analizar el problema de vibración en vigas de material isótropo. Khalid et al. (2005) estudiaron el comportamiento frente a cargas de flexión de una viga con sección en doble T de fibra de vidrio en matriz epoxi, con el Método de los Elementos Finitos usando elementos tipo viga y comparando los resultados con los obtenidos en ensayos de flexión sobre tres y cuatro puntos. Sapountzakis (2005) empleó el Método de los Elementos de Contorno para analizar el problema de torsión no uniforme sobre barras de material compuesto en condiciones de vibración libre y forzada.

A pesar de la extensión de las técnicas numéricas para resolver estos y otros problemas, los modelos analíticos simplificados pueden ser una técnica muy útil para estudiar la respuesta mecánica de elementos tipo viga, dado que proporcionan una solución suficientemente aproximada con un coste computacional muy inferior al de los métodos numéricos (Reddy, 1997). Son una herramienta muy útil en los procesos de optimización, puesto que permiten evaluar, de forma sencilla, la influencia de diferentes parámetros del problema en la respuesta global de la estructura. El interés de estos modelos queda demostrado si se considera el gran número de publicaciones en las que se emplean estas herramientas.

Para resolver las ecuaciones del movimiento de la viga mediante métodos simplificados, la mayoría de los investigadores utilizan el análisis modal. Este método consiste en la separación de las variables espaciales y temporales y expresa la solución al sistema como una combinación de los diferentes modos propios. En el análisis de una viga considerando la teoría de cortadura de primer orden exige resolver una ecuación diferencial de orden cuatro y si además se considera el acoplamiento flexión-torsión de orden seis. Miller y Adams (1975) utilizaron este método para estudiar frecuencias y modos propios de una viga en voladizo empleando la teoría de cortadura de primer orden. Abramovich (1993) estudió mediante este método la vibración de vigas en voladizo incluyendo cargas gravitatorias. Banerjee (2001) realizó un estudio similar incluyendo los esfuerzos de torsión, proporcionando soluciones analíticas cerradas para vigas en voladizo. Dong et al. (2005) ampliaron el estudio anterior considerando una viga de sección variable a tramos, comparando los resultados con los de un modelo de elementos finitos.

Sin embargo, cuando no se cumplen las condiciones de isostatismo o si la sección de la viga tiene una rigidez a flexión variable, la resolución de las ecuaciones diferenciales mediante análisis modal se hace más complicada. En estos casos se han utilizado otros métodos para estudiar el comportamiento de vigas, como el Método de la Matriz de Transferencia que utiliza una mixta fuerza-desplazamiento. Subrahmanyam y Garg (1997) utilizaron este método para analizar las vibraciones de viga isótropas con diferentes condiciones de contorno, considerando la deformación de cortadura y la inercia de la sección. Yildirim y Kiral (2000) utilizaron también el Método de la Matriz de Transferencia para el estudio de las vibraciones libres de vigas de tipo laminado con secuencia de apilamiento simétrica, comparando los resultados obtenidos utilizando tanto la teoría del laminado como la teoría de cortadura de primer orden.

Una alternativa para la resolución de las ecuaciones de movimiento, es el empleo del Método de las Funciones de Influencia, que tiene la ventaja de evitar el cálculo de las frecuencias y modos propios para conocer la respuesta de una viga frente a una carga dinámica (Meirovith, 1967). Diversos autores emplearon este método para analizar vigas de Euler-Bernoulli determinando las frecuencias propias para vigas intactas (Penny y Reed, 1971) y fisuradas (Fernández-Sáez y Navarro, 2002) pero no se han encontrado referencias de su aplicación a materiales de tipo laminado.

El Método de las Funciones de Influencia es una combinación del principio de superposición con el principio de D'Alembert, es posible aplicar este método a la resolución de las ecuaciones de la teoría de Elasticidad y Resistencia de Materiales debido a que éstas son lineales. El Método de las Funciones de Influencia permite calcular los movimientos producidos en un sistema continuo unidimensional mediante la resolución de una ecuación integral, por lo que no es necesario el cálculo previo de las frecuencias y los modos propios.

El desplazamiento de un punto de una viga de longitud  $L$ , en función del tiempo,  $\delta(x,t)$ , se obtiene mediante la siguiente ecuación.

$$\delta(x,t) = \int_0^L C(x,\xi) \cdot p(\xi,t) d\xi \quad (2.48)$$

donde  $p(\xi,t)$  es la carga aplicada en el punto  $\xi$  en el instante de tiempo  $t$  y  $C(x,\xi)$  es la función de influencia, que se define como el desplazamiento producido en el punto  $x$  cuando se aplica una carga unitaria en el punto  $\xi$  para unas condiciones de contorno determinadas.



## **2.3. Modelización numérica del comportamiento mecánico de materiales compuestos**

Los modelos simplificados permiten conocer el comportamiento global de una estructura con un reducido coste computacional, pero si es necesario determinar el estado tensional en un determinado punto de la estructura o predecir la rotura de un laminado, es necesario recurrir a modelos numéricos más complejos aunque el coste computacional sea mayor.

### **2.3.1. Modelos de rotura en condiciones dinámicas**

El desarrollo experimentado por los códigos de simulación numérica durante los últimos años, ha provocado la aparición de modelos de comportamiento mecánico para materiales compuestos de tipo laminado que tienen en cuenta los distintos modos de daño que pueden aparecer. Debido a la fragilidad del refuerzo, estos modelos no suelen contemplar deformación plástica en el material y se limitan a proponer criterios de fallo que acotan el dominio elástico y cuya verificación implica la pérdida de rigidez en una o más direcciones de forma brusca o progresiva.

En la literatura se pueden encontrar un gran número de modelos para laminados con diferentes criterios de rotura (Reddy, 1997; Barbero, 1999; Miravete, 2000; Lopez-Puente, 2003). Ante la falta de consenso entre los investigadores en cuanto a qué criterios son los que predicen mejor el fallo de un laminado, se realizó un ejercicio internacional en el que se realizó un trabajo de comparación de los distintos criterios entre sí y frente a resultados experimentales en condiciones estáticas. Este ejercicio, llamado World Wide Failure Exercise, demostró que este campo no está cerrado y que actualmente no existe ningún criterio de rotura que sea capaz de predecir correctamente el fallo de un laminado bajo cualquier tipo de

carga aún en condiciones estáticas, el ejercicio puede encontrarse en los números 58 (1998), 62 (2002) y 64 (2004) de la revista Composite Science and Technology.

Dentro de los diferentes criterios de fallo aplicables a materiales compuestos de tipo laminado se pueden distinguir entre los que consideran el fallo dentro del plano de cada lámina (bidimensionales) y los que consideran el fallo del laminado teniendo en cuenta el estado de tensiones tridimensional.

### **2.3.1.1. Criterios de fallo en la lámina**

Estos criterios consideran exclusivamente las tensiones en el plano de la lámina y, por tanto, la pérdida de rigidez afecta únicamente a las propiedades en ese mismo plano. Un análisis crítico sobre la capacidad predictiva de cada uno de ellos puede encontrarse en el trabajo de Soden et al. (1998). Se pueden agrupar en tres familias: en primer lugar, los criterios en los que se compara únicamente la componente de valor máximo, ya sea de la tensión o de la deformación; en segundo lugar, los criterios cuadráticos en los que se consideran distintas componentes actuando al mismo tiempo como los criterios de Tsai-Hill y Tsai-Wu y, finalmente, criterios en los que se consideran diferentes modos de fallos en los que actúan diferentes componentes de la tensión. Existen numerosos criterios de este último tipo, como se muestra en el World Wide Failure Exercise, en este apartado se muestran dos que pueden resultar representativos, como son el criterio de Chang-Chang y el de Hashin.

#### **Criterios de valor máximo:**

- **Tensión máxima:** este criterio asume que cuando se alcanza un valor máximo en una de las componentes del tensor de tensiones el material se rompe. En los materiales de tipo laminado se suelen definir dos valores máximos de tensión en dirección de las fibras (uno para tracción y otro para compresión), otros dos valores en dirección perpendicular y un valor máximo para la tensión de cortadura en el plano de la lámina.

- **Deformación máxima:** este criterio es muy similar al anterior, la única diferencia es que los valores máximos que definen la rotura del material son valores de deformación máxima en lugar de tensión. Se definen cinco valores límites que son equivalentes a los del criterio de tensión máxima.

#### Criterios cuadráticos:

- **Tsai-Hill:** es uno de los criterios tensionales más empleados y está implementado en la mayoría de los códigos comerciales de elementos finitos que simulan el comportamiento mecánico de materiales compuestos de tipo laminado. Una de las limitaciones de este criterio es que no distingue entre tensiones de tracción y de compresión. En la ecuación 2.49 se muestra este criterio en su versión simplificada para dos dimensiones, aparecen las componentes de la tensión en el plano, así como los valores de tensión máxima descritos en el criterio de máxima tensión. Se considera que un punto determinado de la lámina ha fallado cuando  $I_f$  alcanza un valor de la unidad.

$$I_f = \frac{\sigma_{11}^2}{X^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{X^2} + \frac{\sigma_{22}^2}{Y^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{S^2} \quad (2.49)$$

donde  $X$  es la resistencia en dirección de las fibras,  $Y$  la resistencia en dirección perpendicular y  $S$  la resistencia a cortadura.  $\sigma_{11}$  es la tensión en dirección de las fibras,  $\sigma_{22}$  en dirección perpendicular y  $\sigma_{12}$  la tensión de cortadura.

- **Tsai-Wu:** es también un criterio de tipo tensional. Es más complejo porque tiene en cuenta diferentes combinaciones de las componentes del tensor de tensiones.

$$I_f = F_1\sigma_{11} + F_2\sigma_{22} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{66}\sigma_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} \quad (2.50)$$

En la ecuación, además de las tensiones en el plano, aparecen una serie de coeficientes ( $F_1, F_2, F_{11}, F_{22}, F_{66}$ ) que son función de las tensiones de rotura y  $F_{12}$  que es un valor de resistencia que se obtiene mediante un ensayo de tracción biaxial. Al igual que en el criterio anterior, cuando  $I_f$  alcanza el valor unidad se considera que la lámina ha fallado.

### Criterios que consideran diferentes modos de fallo:

- **Chang-Chang:** Este criterio permite distinguir tres modos de fallo diferentes, cada uno de ellos se cumple cuando su ecuación asociada alcanza el valor unidad.

El primer modo de fallo contempla la rotura de fibras.

$$e_f^2 = \left( \frac{\sigma_{11}}{X_t} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{12}}{S_{12}} \right)^2 \geq 1 \quad (2.51)$$

donde  $X_t$  es la resistencia a tracción en la dirección de las fibras, y  $S_{12}$  la resistencia a cortadura en el plano de la lámina.

El segundo modo contempla la rotura de la matriz a tracción.

$$e_{mt}^2 = \left( \frac{\sigma_{22}}{Y_t} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{12}}{S_{12}} \right)^2 \geq 1 \quad \text{con } \sigma_{22} \geq 0 \quad (2.52)$$

siendo  $Y_t$  la resistencia del laminado a tracción en dirección perpendicular a la de las fibras.

El tercer modo contempla la rotura de la matriz a compresión.

$$e_{mc}^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{-\sigma_{22}}{S_{12}} \right)^2 + \frac{Y_c^2 \sigma_{22}}{4S_{12}^2 Y_c} - \frac{\sigma_{22}}{Y_c} + \left( \frac{\sigma_{12}}{S_{12}} \right)^2 \geq 1 \quad \text{con } \sigma_{22} < 0 \quad (2.53)$$

donde  $Y_c$  es la resistencia a compresión en dirección perpendicular a la de las fibras.

- **Hashin:** Este criterio permite distinguir cuatro modos de rotura diferentes. A diferencia del criterio de Chang-Chang distingue la rotura en dirección de las fibras a tracción y a compresión.

El primero modo de fallo contempla la rotura de fibras a tracción.

$$e_{ft}^2 = \left( \frac{\sigma_{11}}{X_t} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{12}}{S_{12}} \right)^2 \geq 1 \quad \text{con } \sigma_{11} \geq 0 \quad (2.54)$$

El segundo modo de fallo contempla la rotura en dirección de las fibras a compresión.

$$e_{fc}^2 = \left( \frac{\sigma_{11}}{X_c} \right)^2 \geq 1 \quad \text{con } \sigma_{11} < 0 \quad (2.55)$$

donde  $X_c$  es la resistencia a compresión en dirección de las fibras.

El tercer modo contempla la rotura de la matriz a tracción.

$$e_{mt}^2 = \left( \frac{\sigma_{22}}{Y_t} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{12}}{S_{12}} \right)^2 \geq 1 \quad \text{con } \sigma_{22} \geq 0 \quad (2.56)$$

El cuarto modo contempla la rotura de la matriz a compresión.

$$e_{mc}^2 = \frac{\sigma_{22}}{Y_c} + \left( \frac{\sigma_{12}}{S_{12}} \right)^2 \geq 1 \quad \text{con } \sigma_{22} < 0 \quad (2.57)$$

Cada fallo se produce cuando su ecuación asociada alcanza el valor unidad.

### 2.3.1.2. Criterios de fallo del laminado

Cuando el laminado tiene que soportar tensiones interlaminares los criterios presentados anteriormente presentan grandes limitaciones y es necesario emplear criterios de tipo tridimensional.

A continuación se describe el criterio de rotura propuesto por Hou et al. (2000) que ha sido validado para laminados carbono/epoxi sometidos a impactos balísticos con cañón de gas (Lopez-Puente, 2003). El modelo consta de cuatro modos de fallo y está basado en la formulación del modelo bidimensional de Chang-Chang (1987) y el criterio de delaminación, desarrollado por Brewer y Lagace (1988) cuya expresión se muestra en la ecuación 2.58.

$$d_{del}^2 = \left( \frac{\sigma_{33}}{Z_r} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{23}}{S_{23}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{31}}{S_{31}} \right)^2 \geq 1 \quad (2.58)$$

donde  $Z_r$  es la resistencia a tracción en dirección perpendicular al plano de la lámina,  $S_{23}$  es la resistencia a cortante en el plano perpendicular a la dirección de las fibras y  $S_{31}$  la resistencia a cortante en el plano perpendicular a la dirección 2.

Para modelizar los mecanismos de daño en un problema de impacto se modificaron los criterios de rotura de fibras y rotura de matriz a tracción para poder introducir las componentes de la tensión fuera del plano. En el criterio de rotura de fibras (ecuación 2.59) se ha añadido la componente de cortadura  $\sigma_{13}$  y la resistencia a cortadura en el plano de la lámina,  $S_{12}$ , ha sido sustituida por  $S_f$ , resistencia a cortadura de la fibra.

$$d_f^2 = \left( \frac{\sigma_{11}}{X_t} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{S_f^2} \right)^2 \geq 1 \quad (2.59)$$

En el criterio de rotura de la matriz a tracción (ecuación 2.60) se introduce un nuevo término,  $\sigma_{23}$ , que representa la contribución del cortante en el plano

perpendicular a las fibras, y la nueva constante  $S_{23}$  es la resistencia a cortadura en ese mismo plano.

$$d_{mt}^2 = \left( \frac{\sigma_{22}}{Y_t} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{12}}{S_{12}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{23}}{S_{23}} \right)^2 \geq 1 \quad \text{con } \sigma_{22} \geq 0 \quad (2.60)$$

Tanto el criterio de rotura de la matriz a compresión como el criterio de delaminación permanecieron sin modificaciones.

Al verificarse alguno de los criterios la pérdida de propiedades del laminado se recoge reduciendo a cero ciertas componentes de la tensión. En la tabla 2.1 se muestran las componentes de la tensión que se anulan cuando se cumple cada criterio de rotura.

Criterio de rotura	Rot. de fibras	Rot. Matriz a trac.	Rot. Matriz a comp.	Delaminación
$\sigma_{11}$	X			
$\sigma_{22}$	X	X	X	
$\sigma_{33}$	X			X
$\sigma_{12}$	X	X		
$\sigma_{13}$	X			X
$\sigma_{23}$	X			X

Tabla 2.1. Componentes tensionales afectadas en el criterio de rotura de Hou.

### **2.3.2. Comportamiento frente a impactos de baja velocidad**

La disponibilidad de un modelo de comportamiento mecánico para materiales compuestos de tipo laminado implementado en un código numérico es de gran utilidad como herramienta para el diseño. Un proceso bastante común para la validación de estos modelos de comportamiento es la simulación de ensayos de laboratorio para comparar los resultados experimentales con los numéricos. En estas simulaciones, no sólo es necesario disponer de un modelo de comportamiento mecánico para la probeta, sino que también hay que realizar un modelo numérico de los dispositivos de ensayo que intervienen. En el caso de los ensayos de impacto de baja velocidad, ya sea en torre de caída o en péndulo Charpy, es necesario modelizar tanto el percutor encargado de la aplicación de la carga como el utillaje que soporta la probeta.

En la bibliografía se encuentran numerosos estudios en los que realizan hipótesis simplificativas para evitar la modelización de los dispositivos experimentales. Por ejemplo, Nishikawa et al. (2007), modelizaron ensayos en torre de caída sobre laminados de fibra de carbono en forma de placas simplemente apoyadas para estudiar el crecimiento de una delaminación. Para no modelizar el contacto de la probeta con el utillaje en el que se apoya, impusieron condiciones de contorno en los nodos correspondientes del laminado restringiendo los desplazamientos. Por otro lado, evitaron la modelización del percutor sustituyéndolo por una carga puntual aplicada en el centro de la probeta. Rizov (2007) realizó un estudio de impactos de baja energía en torre de caída sobre espumas de PVC empleando diferentes percutores. También modelizó el apoyo de la probeta sobre el utillaje mediante restricciones a los desplazamientos aplicadas en los nodos correspondientes, mientras que el percutor fue modelizado como un sólido rígido simplificado manteniendo la forma del extremo.



Sánchez-Sáez (2002) realizó una simulación del ensayo de flexión en tres puntos en condiciones dinámicas sobre probetas de fibra de carbono. En este trabajo se llevó a cabo una modelización bidimensional detallada del percutor, de forma que se pudieron identificar las frecuencias propias del mismo y eliminarlas del registro fuerza-tiempo mediante un proceso de filtrado. Okoli y Abdul-Latif (2002) realizaron una simulación del ensayo de flexión en tres puntos en condiciones dinámicas sobre probetas de tejido de fibra de vidrio, considerando la variación de las propiedades mecánicas en función de la velocidad de deformación. Los autores llevaron a cabo una modelización tridimensional de los apoyos y del percutor, pero sólo consideraron la zona de contacto con la probeta. A pesar de las aportaciones de estos y otros autores, queda mucho trabajo por realizar en la simulación de impactos de baja velocidad sobre materiales compuestos, tanto desde el punto de vista de desarrollo de modelos de comportamiento mecánico para laminados como desde el de la influencia de los dispositivos de ensayo en los resultados.

## 2.4. Tolerancia al daño

La tolerancia al daño de una estructura o componente estructural es la capacidad de dicha estructura para resistir un cierto nivel de daño o la presencia de defectos que puedan producirse durante la fabricación o la vida en servicio, y ser capaz de desempeñar sus funciones operativas (MIL-HDBK-17-3E, 1997). El objetivo de obtener un determinado nivel de tolerancia al daño es determinar con seguridad que la estructura no fallará catastróficamente, manteniendo siempre la máxima eficiencia estructural (Sánchez-Sáez, 2002). Por lo tanto, los estudios de tolerancia al daño de materiales compuestos se orientan a la evaluación de las propiedades mecánicas residuales de estructuras o componentes realizados con dichos materiales.

De las diversas causas que producen daño en una estructura, el impacto es generalmente reconocido como la condición de carga más severa para los materiales compuestos de tipo laminado (Hawyes et al., 2001). Tradicionalmente se ha distinguido entre impactos de baja velocidad e impactos de alta velocidad (en ocasiones también se considera hipervelocidad). No existe una transición clara entre los impactos de alta y baja velocidad y existen diversas definiciones propuestas por distintos investigadores, una de las más habituales (Abrate, 1998) define un impacto como de alta velocidad cuando el ratio entre la velocidad de impacto frente a la velocidad de propagación de las ondas de compresión a lo largo del espesor es mayor que la deformación de rotura en dicha dirección. Esto implica que el daño se produce durante los primeros recorridos de las ondas de compresión, antes de que se produzca una deformación global de la estructura y, por tanto, no tienen importancia las condiciones de contorno puesto que sólo se produce un daño localizado. Los impactos de alta velocidad se suelen producir por la colisión de un objeto de reducida masa contra la estructura, por ejemplo, durante el aterrizaje o despegue de un avión, pequeñas piedras u otros objetos

presentes en la pista pueden ser arrojados por los neumáticos contra la estructura de la aeronave.

Los impactos de baja velocidad suelen ser producidos por la colisión de un objeto de masa considerable contra la estructura y pueden ocurrir durante la fabricación, el mantenimiento o en condiciones de servicio. Los daños producidos en fabricación y mantenimiento se deben a golpes de herramientas, cajas de herramientas y/o equipamiento de trabajo sobre la superficie de la estructura debido a descuidos. De hecho, el síndrome de la caja de herramientas es una de las referencias actuales en los ensayos de baja energía para materiales compuestos (Miravete 2000). El daño resultante en este tipo de impacto, principalmente delaminaciones, en muchas ocasiones no es visible en la superficie impactada y puede pasar desapercibido en una inspección visual de rutina, quedando en servicio piezas dañadas previamente. En muchas situaciones (Delfosse et al., 1995), el nivel de impacto para el cual se produce un daño visible es mucho mayor que el nivel que produce una pérdida significativa de propiedades mecánicas. Además, estas delaminaciones pueden crecer durante la vida en servicio de la estructura.

#### **2.4.1. Estudios de tolerancia al daño en materiales compuestos**

Un estudio de tolerancia al daño se suele realizar en tres fases: en primer lugar, es necesario generar un daño en el elemento estructural sin producir la rotura completa del mismo, ya que sus propiedades residuales se anularían; la segunda fase consiste en estimar el daño producido de forma cuantitativa; finalmente, es necesario evaluar las propiedades residuales del elemento estructural tras sufrir el daño y compararlas con las propiedades del mismo sin dañar.

En el caso de los materiales compuestos, el impacto se considera la condición de carga más crítica por lo que, en general, el proceso de generación de daño consiste

en impactos de baja velocidad. Aunque se realizan estudios de tolerancia al daño en los que se genera el daño mediante impactos de alta velocidad, como los de cañón de gas (Cantwell y Morton, 1989), los impactos de baja velocidad se consideran más peligrosos porque se producen delaminaciones que no son detectables mediante inspección visual. Para generar el daño mediante impactos de baja velocidad los dispositivos más utilizados son la torre de caída de peso o el péndulo Charpy. Estos impactos de baja velocidad, se suelen efectuar sobre elementos estructurales tipo placa. Los impactos más habituales en los estudios de tolerancia al daño se realizan en torre de caída de peso con un percutor de punta semiesférica, (Kim et al., 1993; Schubel et al., 2007). En menos casos, estos impactos se realizan sobre elementos estructurales tipo viga, por ejemplo, Lamy y Dixneuf (2000) emplearon el péndulo Charpy en la configuración de flexión en tres puntos para analizar como evoluciona el daño en probetas constituidas por diferentes tipos de tejido.

Una vez generado un cierto nivel de daño sobre el elemento estructural, el siguiente paso consiste en estimar cuantitativamente dicho daño. Debido a que el mecanismo de daño más habitual en este tipo de ensayos es la delaminación, la estimación del nivel de daño consiste, como regla general, en una medida del área dañada. Para estimar la extensión del área delaminada es necesario recurrir a herramientas que permitan conocer el daño interno de un elemento estructural y que, además, deben ser técnicas de inspección no destructiva si posteriormente se quieren conocer las propiedades residuales. Existen diversas técnicas que cumplen estos requisitos como son las radiografías (Soutis y Curtis, 1996), la interferometría electrónica (Zhang y Richardson, 2006) o las inspecciones mediante ultrasonidos (Scarponi et al., 2006).

La última fase de un estudio de tolerancia al daño consiste en estimar las propiedades residuales del elemento estructural que ha sufrido el impacto para valorar si es capaz de desempeñar sus funciones operativas. La evaluación de las

propiedades residuales se ha realizado tradicionalmente mediante ensayos de compresión después de impacto (Cochelin y Potier Ferry, 1991; Duarte et al., 1999; Hawyes et al., 2001). En la recopilación de publicaciones sobre estudios de impacto sobre materiales compuestos realizada por Abrate (1998), se pueden encontrar hasta 50 publicaciones en las que se realizan ensayos de compresión después de impacto, 34 que realizan tracción después de impacto y sólo 7 en las que se estudian las propiedades residuales a flexión. Tras la publicación de este estudio la tendencia no ha cambiado, siguen apareciendo muchos más investigaciones en las que se evalúan las propiedades residuales a compresión (Khondker et al., 2004; Sánchez-Sáez et al., 2005; Zhang et al., 2006; Schubel et al., 2007), aunque también se hayan publicado artículos en los que evalúan las propiedades a flexión después de impacto (Zhang y Richardson, 2006; Amaro et al., 2006).

Las delaminaciones producidas en los impactos de baja energía reducen significativamente la resistencia a compresión, mientras que los valores de resistencia a tracción o flexión se ven reducidos en menor medida. La gran reducción de la carga en compresión que puede sufrir una estructura de tipo laminado después de un impacto, se debe al pandeo de los sublaminados que se forman en las áreas delaminadas, de ahí que la sollicitación a compresión sea crítica para las estructuras de materiales compuestos (Sánchez-Sáez, 2002).

## 2.4.2. Tolerancia al daño a flexión

Considerando que el objetivo de un estudio de tolerancia al daño es evaluar la capacidad de un elemento estructural para seguir desempeñando sus funciones operativas, y que en numerosas estructuras sometidas a esfuerzos de flexión se emplean materiales compuestos de tipo laminado, la estimación de las propiedades residuales a flexión ha recibido relativamente muy poca atención.

Rotem (1988) estudió el efecto del daño producido mediante un impacto en torre de caída en la configuración de flexión en tres puntos sobre la rigidez y resistencia residual a flexión. Comparó el comportamiento de un laminado frágil constituido por fibra de carbono en matriz epoxi con la configuración  $[0/90]_{2s}$ , frente a un laminado más dúctil de fibra de vidrio en matriz epoxi con la configuración  $[\pm 45]_{2s}$ , encontrando que las propiedades residuales caen más drásticamente en el laminado frágil que en el dúctil.

Sin embargo, la mayoría de los autores que estudian la tolerancia al daño a flexión no generan el daño mediante esfuerzos de flexión sobre vigas, en su lugar realizan impactos sobre probetas tipo placa. Tras el impacto, cortan las probetas impactadas en forma de viga para evaluar las propiedades residuales a flexión, por ejemplo, Kim et al. (1993) analizaron la influencia de la modificación de la matriz en las propiedades residuales a flexión. Para generar el daño realizaron impactos de baja energía sobre placas de fibra de carbono en matriz epoxi. Posteriormente, para estudiar las propiedades residuales, cortaron la placa en varias probetas tipo viga sobre las que realizaron ensayos de flexión. Mouritz (1996) realizó explosiones bajo el agua generando unas ondas de presión que producían un daño sobre placas constituidas por laminados de fibra de vidrio. Para estudiar las propiedades residuales a flexión, cortó las probetas después de generar el daño y las ensayó en la configuración de flexión en cuatro puntos. Amaro et al. (2006) generaron daño mediante impactos sobre placas empotradas de fibra de carbono en matriz epoxi. Después de evaluar el daño mediante

inspección por ultrasonidos, cortaron las probetas dañadas por el impacto por su zona central obteniendo probetas de flexión con una delaminación a través de todo su ancho, sobre estas probetas estudiaron las propiedades residuales en un ensayo de flexión en tres puntos.

Estas técnicas tienen el inconveniente de que el daño producido en una placa no tiene porqué ser el mismo que el producido en una viga cuando ambas se encuentran sometidas a carga que generan esfuerzos de flexión, además, durante el proceso de mecanizado, no es posible garantizar que las probetas no sufran un daño adicional al generado durante el impacto. Para evitar este daño adicional, Zhang y Richardson (2006) utilizaron probetas con dimensiones intermedias entre una viga y una placa, 140x40 mm<sup>2</sup>. En la fase de generación de daño, las probetas cumplían la función estructural de una placa y eran sometidas a impactos de flexión biaxial en torre de caída utilizando un percutor de punta semiesférica. Posteriormente, evaluaron el daño mediante interferometría electrónica. En la fase de evaluación de las propiedades residuales, las probetas desempeñaban la función estructural de una viga, fueron colocadas biapoyadas y se aplicó una carga en la sección central en la configuración de flexión en tres puntos.

La mayoría de los elementos estructurales pueden sufrir, durante su vida en servicio, impactos que generen un cierto daño, si estos elementos están diseñados para soportar esfuerzos de flexión, es bastante probable que cuando se produzca el impacto sobre la estructura, éste genere esfuerzos de flexión. Por otro lado, los elementos estructurales que sufren un impacto deben seguir cumpliendo sus funciones operativas, si dichos elementos están diseñados para soportar esfuerzos de flexión, deberán seguir soportándolos tras el impacto. En estas condiciones, parece necesario profundizar en el estudio de la tolerancia al daño sobre materiales compuestos generando el daño mediante esfuerzos de flexión y evaluando las propiedades residuales a flexión.

### 2.4.3. Ensayos de flexión dinámica

Los ensayos de flexión producen una respuesta estructural del laminado generando un estado tensional en la sección no uniforme, por tanto, no se pueden considerar como ensayos de caracterización. Uno de los ensayos de flexión más habituales es el de flexión en tres puntos, este ensayo está recogido en la norma ASTM D 790-98 para su realización a temperatura ambiente y en condiciones estáticas. Durante un ensayo de flexión en tres puntos, el laminado está sometido teóricamente a una combinación de tensiones normales y de cortadura, lo que origina que la rotura se produzca por tracción, compresión y cortadura, (Carlsson y Byron Pipes, 1997). El estado de tensiones real es bastante más complejo, particularmente en las zonas del laminado en contacto con los apoyos y el punto de aplicación de la carga. En estas zonas se produce una concentración de tensiones, que puede provocar en la probeta un aplastamiento localizado o la rotura por compresión (Sánchez-Sáez, 2002). Para obtener la respuesta completa a flexión de los laminados no es suficiente, en principio, conocer la resistencia y el módulo a flexión estática dado que estas estructuras pueden estar sometidas a cargas dinámicas durante su vida en servicio, por tanto, también es conveniente determinar estas propiedades en condiciones dinámicas. Los ensayos de flexión dinámica, en la mayoría de los casos, se realizan a baja velocidad empleando los dispositivos de péndulo Charpy (Tomita y Morioka, 1997; Pegoretti et al., 2006) o de torre de caída de peso (Okoli y Abdul-Latif, 2002; Sánchez-Sáez, 2002), con percutores instrumentados para medir la carga aplicada. Como resultado de estos ensayos se obtiene una curva de fuerza-tiempo.

Una de las principales dificultades que surgen a la hora de tratar los datos obtenidos de un ensayo de impacto de baja velocidad, es la interpretación del ruido existente en la señal registrada fuerza-tiempo. Este ruido suele deberse a efectos dinámicos producidos durante el contacto entre el percutor y la probeta y puede distorsionar los resultados. Hay estudios que en lugar de registrar la señal



fuerza-tiempo, miden la deceleración del percutor mediante un acelerómetro (Lifshitz et al., 1995; Found et al., 1998). En este tipo de señal también se aprecia ruido durante todo el ensayo, pero las causas de éste no sólo se deben a efectos producidos por la interacción entre el percutor y la probeta, ya que parte del ruido aparece incluso antes producirse el contacto. El ruido en esta señal se podría corresponder con las frecuencias propias del percutor, como advierte la norma para la medida de la resistencia al daño en torre de caída de peso sobre placas de material compuesto ASTM D7136-05.

Tanto en los ensayos realizados en torre de caída de peso como en los realizados en péndulo Charpy, la técnica de medida del desplazamiento más habitual consiste en integrar el registro fuerza-tiempo para obtener los valores de aceleración, velocidad y, finalmente, el desplazamiento del percutor. Si durante el ensayo no se produce separación entre el percutor y la probeta y no aparece el fenómeno de indentación, se puede considerar que el desplazamiento de la probeta es el mismo que el del percutor. Algunos autores afirman que con ese tipo de medida indirecta no se conoce con exactitud el desplazamiento real de la probeta y, por lo tanto, no se puede calcular la energía absorbida durante el impacto. Como alternativa se pueden emplean métodos directos para medir el desplazamiento de la probeta como transductores ópticos (Mili y Necib, 2001) o inductivos (Naik et al., 2001). Otra posibilidad es el empleo de una cámara de alta velocidad dado que la configuración de flexión en tres puntos permite visualizar el desplazamiento transversal de la probeta (Hallett, 2000).

Varios investigadores han estudiado si para velocidades de impacto bajas las estructuras se comportan cuasi-estáticamente y si es posible, por tanto, utilizar la formulación para condiciones estáticas en el análisis de la respuesta a flexión en estos ensayos. Sjöblom et al. (1988) realizaron ensayos estáticos y dinámicos sobre un material carbono/epoxi para conocer si era sensible a la velocidad de deformación. Se obtuvieron esencialmente los mismos resultados para los ensayos

estáticos que para los dinámicos de baja velocidad de impacto, de lo que dedujeron que los efectos de la velocidad de deformación en el comportamiento eran mínimos. Lifshitz et al. (2005) realizaron ensayos estáticos y dinámicos de flexión en tres puntos sobre laminados de carbono/epoxi con diferentes secuencias de apilamiento. Observaron que se obtenían los mismos resultados en el módulo aparente a flexión en condiciones estáticas y dinámicas, sin embargo, los valores de resistencia y de energía de rotura eran menores en los ensayos dinámicos que en los estáticos, de lo cual deducían que la carga de impacto era más crítica que la carga estática.

Otro problema que hay que considerar en los ensayos de flexión dinámica es que se mantenga la configuración de flexión durante todo el ensayo, se puede producir una separación entre el percutor y la probeta o entre la probeta y los apoyos debido a las vibraciones y las fuerzas de inercia. A la vista de estos problemas es necesario profundizar en el estudio de estos ensayo para lo cual pueden resultar de gran utilidad herramientas como los modelos analíticos o numéricos.

# **CAPÍTULO 3**

## **COMPORTAMIENTO A FLEXIÓN DE VIGAS CON ACOPLAMIENTO FLEXIÓN-TORSIÓN**

### **3.1. Introducción**

En este capítulo se desarrolla un modelo simplificado para el cálculo de los desplazamientos dinámicos en una viga de tipo laminado considerando acoplamiento entre los esfuerzos de flexión y torsión. Para desarrollar este modelo se ha realizado un estudio en aproximaciones sucesivas, analizando los distintos parámetros implicados en el problema. Los resultados obtenidos en cada una de las aproximaciones han servido para plantear los estudios de las siguientes aproximaciones, por este motivo la estructura del capítulo sigue la estrategia de aproximaciones sucesivas.

En la introducción se presenta un planteamiento general del problema, así como una descripción de las vigas estudiadas y de los modelos numéricos de verificación. En los siguientes apartados se muestran las aproximaciones sucesivas al problema.

### **3.1.1. Planteamiento general**

El estudio de vigas de tipo laminado con acoplamiento flexión-torsión se ha realizado en una serie de aproximaciones sucesivas:

En primer lugar, se ha analizado la influencia de las tensiones de cortadura interlaminar, que hay que tener en cuenta cuando se analizan materiales compuestos de tipo laminado sometidos a flexión puesto que son especialmente sensibles a las tensiones de cortadura interlaminar. Se ha estudiado la influencia que tienen los distintos parámetros del problema en los esfuerzos de cortadura interlaminar. Las tensiones de cortadura se han estimado mediante la teoría de cortadura de primer orden, por lo que también ha sido necesario estudiar la influencia del factor de corrección de cortadura empleado. Uno de los objetivos de este apartado ha sido establecer una geometría de viga para la cual sea necesario considerar las tensiones de cortadura interlaminar en función de distintos parámetros, con estos resultados se han abordado los siguientes estudios.

En segundo lugar, se ha validado el método de las funciones de influencia para el cálculo de los desplazamientos en vigas de tipo laminado. Para resolver las ecuaciones de movimiento de una viga existen diferentes técnicas, el método de las funciones de influencia ha sido empleado en diversos estudios (Penny y Reed, 1971; Fernández-Sáez y Navarro, 2002) pero no se han encontrado referencias a aplicaciones en materiales de tipo laminado. En este estudio se han calculado los desplazamientos en función de las propiedades elásticas de la lámina y de la configuración del laminado. Una de las principales ventajas que presenta el

método de las funciones de influencia es que el algoritmo de cálculo es independiente de las condiciones de contorno, las condiciones de contorno sólo afectan al cálculo de las funciones de influencia, y éste se realiza en condiciones estáticas. En este apartado se ha verificado este punto aplicando el método a diversas condiciones de contorno, tanto isostáticas como hiperestáticas, comparando los resultados obtenidos mediante un modelo de elementos finitos y ensayos experimentales.

Finalmente, se ha analizado el fenómeno de acoplamiento flexión-torsión en vigas de tipo laminado, en las que puede aparecer debido a la anisotropía del material independientemente de la geometría de la sección. Cuando alguna lámina tiene una orientación distinta a  $0^\circ$  o  $90^\circ$  se produce el fenómeno de acoplamiento en el laminado, en este apartado se ha estudiado cómo varía el fenómeno de acoplamiento en función de las propiedades elásticas de las láminas y el giro de las mismas. Se ha calculado la secuencia de apilamiento para la cual el acoplamiento flexión-torsión se maximiza, posteriormente, se ha analizado el comportamiento dinámico de un laminado con la configuración de máximo acoplamiento.

Los resultados analíticos han sido comparados con los obtenidos mediante diferentes modelos numéricos de verificación. Estos modelos se han implementado en el código comercial de elementos finitos Abaqus y se describen en el apartado 3.1.3.

### 3.1.2. Descripción de las vigas analizadas en el estudio

#### Propiedades del material

Para realizar estos estudios se ha escogido un material de elevada rigidez y baja densidad muy empleado por la industria aeronáutica como el un laminado de fibra de carbono T300 en matriz epoxi, las propiedades del material se muestran a continuación.

Propiedades elásticas de la lámina:

$$E_1 = 138 \text{ GPa} \quad G_{12} = 7,10 \text{ GPa} \quad \nu_{21} = 0,3$$

$$E_2 = 8,96 \text{ GPa} \quad G_{13} = 7,17 \text{ GPa} \quad \nu_{31} = 0,3$$

$$E_3 = 8,96 \text{ GPa} \quad G_{23} = 3,45 \text{ GPa} \quad \nu_{32} = 0,3$$

Resistencia de la lámina, tensiones máximas:

$$X = 1447 \text{ MPa} \quad S_{12} = 93 \text{ MPa}$$

$$X_c = 1447 \text{ MPa} \quad S_{13} = 60 \text{ MPa}$$

$$Y = 52 \text{ MPa} \quad S_{23} = 60 \text{ MPa}$$

$$Y_c = 206 \text{ MPa}$$

Densidad:  $1600 \text{ kg/m}^3$

## **Geometría**

La geometría de las vigas se ha variado en las diferentes fases del estudio, sin embargo, se mantienen ciertas características comunes.

En todos los casos se ha empleado un laminado constituido por ocho láminas de 0,2 mm de espesor. La orientación de las láminas ha variado en las diferentes fases del estudio, pero el número de las mismas se ha mantenido constante de modo que el laminado tenga un espesor de 1,6 mm.

Uno de los parámetros de los que depende en gran medida la influencia de las tensiones de cortadura es la esbeltez de la viga, relación entre la distancia entre apoyos y el espesor. Este parámetro se ha analizado variando la longitud de la viga ya que el espesor se ha mantenido constante.

El ancho de la viga se ha mantenido constante con un valor de 3,2 mm.

## **Condiciones de contorno**

Se han estudiado cuatro condiciones de contorno diferentes aplicadas en los extremos de una viga de un solo tramo, figura 3.1:

- a) Empotrada-Libre (viga en voladizo)
- b) Apoyada-Apoyada (viga biapoyada)
- c) Empotrada-Apoyada
- d) Empotrada-Empotrada (viga biempotrada)

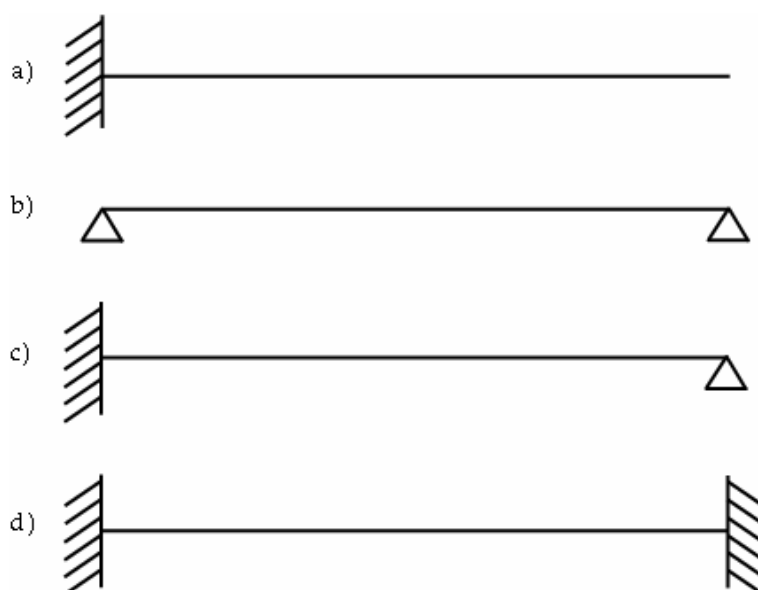


Figura 3.1. Condiciones de contorno: a) viga en voladizo, b) viga biapoyada, c) viga empotrada-apoyada, d) viga biempotrada.

### 3.1.3. Modelos numéricos de verificación

Para comprobar la precisión de los modelos simplificados se han empleado dos modelos de elementos finitos: un modelo unidimensional (FEM1D) y otro tridimensional (FEM3D), ambos implementados en ABAQUS/Explicit (HKS, 2003).

En el modelo unidimensional se han empleado elementos cuadráticos tipo viga de tres nodos, B32 en Abaqus. Los valores de rigidez utilizados en este modelo son el módulo aparente de rigidez a flexión,  $E^b_{xx}$ , y el de rigidez a cortadura interlaminar,  $G^b_{xz}$ , de la teoría de cortadura de primer orden, ecuación 2.23. La viga se ha dividido en 30 elementos y se han aplicado las diferentes condiciones de contorno en sus extremos.

En el modelo tridimensional se han empleado elementos cúbicos de integración reducida de 8 nodos, C3D8R en Abaqus. La viga está compuesta de ocho láminas, en cada una de las cuales se han aplicado las propiedades elásticas de la lámina de acuerdo con su orientación, de esta forma el laminado se modeliza como un material homogéneo pero anisótropo. Cada una de las láminas se ha dividido en



2000 elementos, de forma que la viga consta de un total de 16000 elementos hexaédricos. En los extremos de la viga se han aplicado las diferentes condiciones de contorno.

En el modelo unidimensional, la carga se ha aplicado en la coordenada longitudinal correspondiente, en el modelo tridimensional la carga no ha sido aplicada en un punto para evitar concentración de tensiones, sino que ha sido aplicada en una pequeña superficie centrada en la coordenada longitudinal correspondiente.

En la figura 3.2 se muestra una viga biapoyada de laminado  $[0/90]_{2S}$  sometida a una carga en la sección central en el instante de tiempo de máxima deformación. Se puede observar como las láminas orientadas a  $0^\circ$  soportan una tensión mayor que las orientadas a  $90^\circ$ .

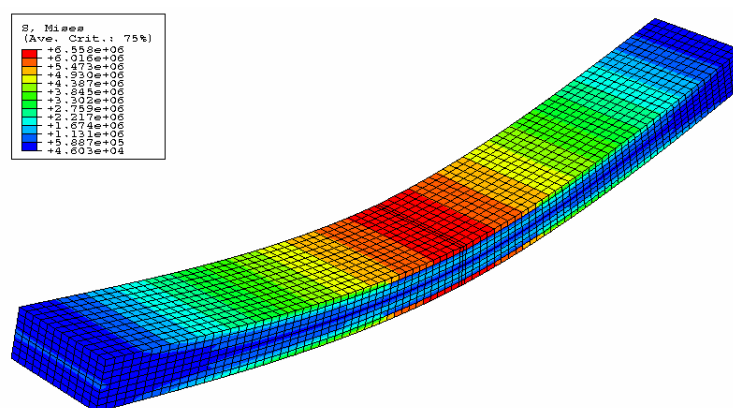


Figura 3.2. Tensión de Von Mises en el modelo tridimensional de la viga  $[0/90]_{2S}$  sometida a una carga en la sección central en el instante de máxima deformación.

En el modelo unidimensional, los valores del desplazamiento vertical y del giro de la sección son proporcionados por el código Abaqus. En el modelo tridimensional, el desplazamiento vertical ha sido calculado en el punto medio de la sección, para evitar errores debido a efectos de compresión local en el punto de aplicación de la carga, y los giros de la sección han sido calculados a partir de los desplazamientos de diferentes nodos. En un modelo tridimensional no existe un giro de la sección propiamente dicho, lo que se produce es un campo de deformaciones

tridimensional, en la figura 3.3 se muestra la sección central del modelo de un laminado con la configuración [50]<sub>s</sub> en voladizo sometido a una carga en el extremo libre.

El giro de la sección se ha estimado como un giro medio calculado a través del desplazamiento de los puntos de sus extremos. Así, el giro de flexión se ha obtenido como la diferencia entre los desplazamientos horizontales de los puntos *a* y *c*, figura 3.3, dividido entre el espesor del laminado, y el giro de torsión se ha calculado como la diferencia entre los desplazamientos verticales de los puntos *b* y *d*, figura 3.3, dividido por el ancho de la viga.

$$\begin{aligned}\phi_x(x,t) &= \frac{u_a(x,t) - u_c(x,t)}{h} \\ \phi_y(x,t) &= \frac{w_b(x,t) - w_d(x,t)}{b}\end{aligned}\tag{3.1}$$

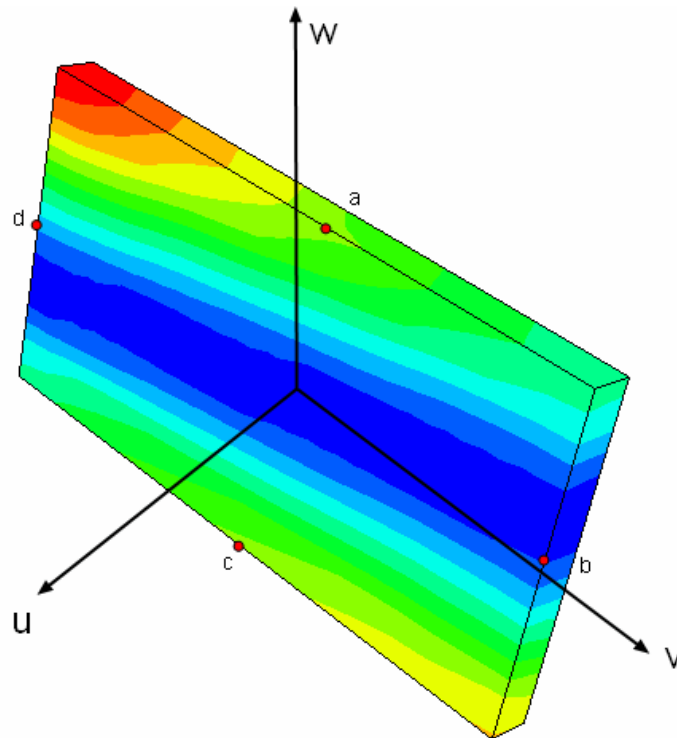


Figura 3.3. Tensión de Von Mises en la sección central del modelo tridimensional de la viga [50]<sub>s</sub> sometida a una carga en el extremo libre, en el instante de máxima deformación.

## 3.2. Influencia de las tensiones de cortadura interlaminar en vigas de tipo laminado

Para analizar la influencia de las tensiones de cortadura interlaminar se ha estudiado un problema concreto, una viga biapoyada, figura 3.1b, con una carga aplicada en su sección central y se ha resuelto mediante el análisis modal. En este problema se han variado los parámetros que mayor influencia tienen en las tensiones de cortadura: la esbeltez ( $L/h$ ), la relación entre la rigidez aparente a flexión y a cortadura interlaminar ( $E_{xx}^b/G_{xz}$ ) y el tiempo de aplicación de la carga.

Para cuantificar la importancia de las tensiones de cortadura interlaminar se ha comparado la teoría clásica del laminado (TL), que no tiene en cuenta las tensiones de cortadura, y la teoría de cortadura de primer orden (TC1) que considera que las tensiones de cortadura interlaminar son constantes a lo largo del espesor de la viga. Si se aplican estas dos teorías a un mismo problema y se observan las diferencias en los resultados, es posible cuantificar la influencia de las tensiones de cortadura en la respuesta global de la viga.

### 3.2.1. Modelización del problema mediante análisis modal

En este apartado se modeliza el problema de una viga biapoyada con una carga en la sección central mediante análisis modal aplicado a la teoría de cortadura de primer orden. El análisis modal es una herramienta ampliamente utilizada para resolver problemas isoestáticos, uno de los inconvenientes de esta técnica es que es necesario resolver el problema para cada una de las condiciones de contorno y estado de carga. En el caso de una viga biapoyada son las siguientes:

$$\begin{cases} w_0(0,t) = w_0(L,t) = 0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial t}(0,t) = \frac{\partial w_0}{\partial t}(L,t) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

La carga aplicada en la sección central se ha aproximado a la que se obtiene en un registro experimental, en un ensayo de rotura en la configuración de flexión en tres puntos en condiciones dinámicas, figura 3.4. Este registro se puede aproximar a una fuerza con crecimiento lineal, ecuación 3.3.

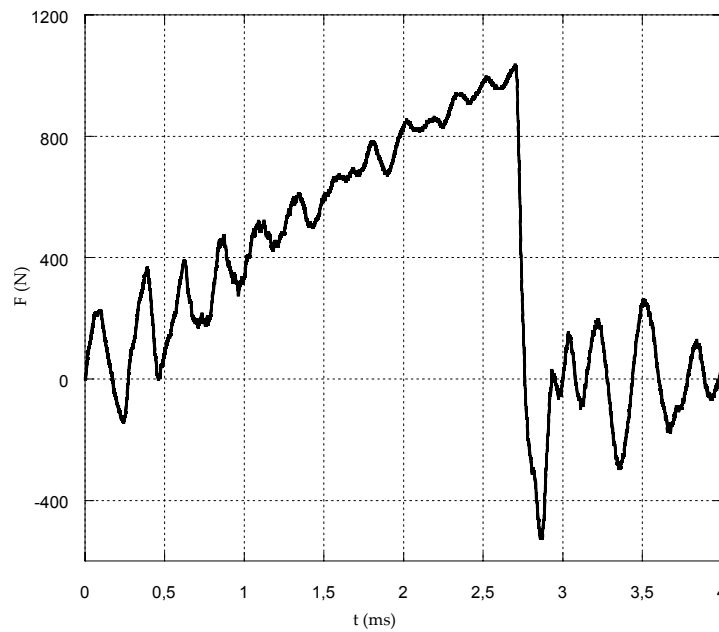


Figura 3.4. Registro experimental de fuerza en un ensayo de rotura en torre de caída de peso, en la configuración de flexión en tres puntos, con una energía de 30 Julios, sobre un laminado unidireccional de fibra de carbono en matriz epoxi.

$$F(t) = \alpha \cdot t \quad (3.3)$$

Para resolver las ecuaciones de movimiento de un laminado mediante análisis modal hay que calcular, en primer lugar, las frecuencias y modos propios de la viga, para ello se eliminan la carga aplicada en la ecuación 2.24 transformando el problema en un estudio de las vibraciones libres.

$$\begin{aligned}
 KG_{xz}^b b h \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) &= \hat{I}_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\
 E_{xx}^b I_{yy} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - KG_{xz}^b b h \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) &= \hat{I}_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Para resolver esta ecuación se ha empleado el método de separación de variables con soluciones del tipo:

$$\begin{cases} w_0(x, t) = \varphi_n(x) \cdot (C_1 \text{Sen}(\omega_n t) + C_2 \text{Cos}(\omega_n t)) \\ \phi_x(x, t) = \phi_n(x) \cdot (D_1 \text{Sen}(\omega_n t) + D_2 \text{Cos}(\omega_n t)) \end{cases} \tag{3.5}$$

Introduciendo estas soluciones en la ecuación 3.4 queda:

$$\begin{aligned}
 KG_{xz}^f A \left( \frac{d\phi_n}{dx} + \frac{d^2 \varphi_n}{dx^2} \right) + \omega_n^2 \rho A \varphi_n &= 0 \\
 E_{xx}^f I_{yy} \frac{d^2 \phi_n}{dx^2} - KG_{xz}^f A \left( \phi_n + \frac{d\varphi_n}{dx} \right) + \omega_n^2 \rho I \phi_n &= 0
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Manipulando estas expresiones se pueden desacoplar las dos funciones incógnitas:

$$\begin{aligned}
 E_{xx}^f I_{yy} \frac{d^4 \varphi_n}{dx^4} + \left( \frac{E_{xx}^f I_{yy} \rho}{KG_{xz}^f} + \rho I \right) \omega_n^2 \frac{d^2 \varphi_n}{dx^2} - \left( 1 + \frac{\omega_n^2 \rho I}{KG_{xz}^f A} \right) \omega_n^2 \rho A \varphi_n &= 0 \\
 E_{xx}^f I_{yy} \frac{d^4 \phi_n}{dx^4} + \left( \frac{E_{xx}^f}{KG_{xz}^f} + 1 \right) \rho I \omega_n^2 \frac{d^2 \phi_n}{dx^2} + \left( \frac{\omega_n^2 \rho}{KG_{xz}^f} - \frac{I}{A} \right) \omega_n^2 \rho I \phi_n &= 0
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Aplicando las condiciones de contorno de una viga biapoyada, ecuación 3.2, se obtienen los modos propios para las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \varphi_n(x) = \text{Sen}\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \\ \phi_n(x) = \text{Cos}\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \end{cases} \tag{3.8}$$

La solución general al problema es la siguiente:

$$\begin{cases} w_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \cdot (C_1 \text{Sen}(\omega_n t) + C_2 \text{Cos}(\omega_n t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \cdot p_n(t) \\ \phi_x(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \cdot (D_1 \text{Sen}(\omega_n t) + D_2 \text{Cos}(\omega_n t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \cdot p_n(t) \end{cases} \quad (3.9)$$

Introduciendo estas soluciones en la ecuación completa, ecuación 2.24, y aplicando la ortogonalidad de las soluciones se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{Bmatrix} q_n'' \\ p_n'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{KG_{xz}^f}{\rho} \lambda_n^2 & \frac{KG_{xz}^f}{\rho} \lambda_n \\ \frac{KG_{xz}^f A}{\rho I} \lambda_n & \frac{KG_{xz}^f A}{\rho I} + \frac{E_{xx}^f}{I_{yy}} \lambda_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_n \\ p_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{\rho A L} \left( \text{Sen}\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) + \text{Cos}\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \right) F(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

simplificando:

$$\{\ddot{Q}\} + [A] \cdot \{Q\} = \{F\} \quad (3.11)$$

La solución del problema homogéneo es:

$$\{Q\} = V \cdot \text{Cos}(\omega_n t) + U \cdot \text{Sen}(\omega_n t) \quad (3.12)$$

A partir de la matriz  $[A]$ , ecuación 3.11, se pueden calcular las frecuencias propias de la viga:

$$\omega_n = \left( \frac{n \cdot \pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{E_{xx}^f I_{yy}}{\rho A}} \sqrt{1 - \frac{\left( \frac{n \cdot \pi}{L} \right)^2}{\frac{KG_{xz}^f A}{E_{xx}^f I_{yy}} + \left( \frac{n \cdot \pi}{L} \right)^2}} \quad (3.13)$$

La ecuación de la fuerza aplicada, ecuación 3.3, tiene forma de rampa, la solución particular para la ecuación completa tendrá la misma forma:

$$\{Q(t)\}_p = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \cdot t \quad (3.14)$$

La solución general para el problema de vibraciones forzadas es la siguiente:

$$\{Q(t)\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \cdot \text{Cos}(\omega_n t) + \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \cdot \text{Sen}(\omega_n t) + \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \cdot t \quad (3.15)$$

siendo:

$$\begin{aligned} a &= \frac{2\alpha}{E_{xx}^f I_{yy} L \lambda_n^2} \left( \frac{E_{xx}^f I_{yy}}{K G_{xz}^f A} + \frac{1}{\lambda_n^2} \right) \cdot \left( \text{Sen}\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) + \text{Cos}\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \right) \\ b &= -\frac{2\alpha}{E_{xx}^f I_{yy} L \lambda_n^3} \left( \text{Sen}\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) + \text{Cos}\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right) \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} w_0(x,0) = 0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Se llega a la solución completa:

$$\{Q(t)\} = \begin{Bmatrix} -a/\omega_n \\ -b/\omega_n \end{Bmatrix} \cdot \text{Sen}(\omega_n t) + \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \cdot t \quad (3.18)$$

### 3.2.2. Planteamiento del estudio del efecto de las tensiones de cortadura

En este estudio se ha empleado la teoría clásica del laminado (TL) y la teoría de cortadura de primer orden (TC1) que considera el factor de corrección de cortadura  $K$ . Para el cálculo de dicho factor existen diferentes soluciones, en este estudio se han empleado tres métodos distintos: el método clásico de Timoshenko (MCT), una modificación de éste propuesta por Vinson y Sierakowski (MCM), (Vinson y Sierakowski, 1986), y el método propuesto por P. Madabhusi-Raman y J. F. Davalos (MCR), (Madabhusi-Raman y Davalos, 1996). Comparando los resultados obtenidos con estos tres métodos para el cálculo del factor de cortante

se puede establecer cuál será el más recomendable para analizar vigas de tipo laminado en función de los parámetros del problema.

### Parámetros analizados

Este análisis se ha realizado variando los parámetros que pueden afectar en mayor medida a la influencia de las tensiones de cortadura:

- La esbeltez de la viga, es decir, la relación entre la distancia entre apoyos y el canto de la viga ( $L/h$ ).
- La relación entre la rigidez aparente a flexión y a cortadura interlaminar del laminado ( $E^b_{xx}/G_{xz}$ ).
- El tiempo de aplicación de la carga.

En una primera fase del estudio se ha realizado un análisis del problema en condiciones estáticas en el que se han variado los dos primeros parámetros del problema. El ratio de esbeltez  $L/h$  se ha cambiado estableciendo diferentes distancias entre apoyos y manteniendo constante el espesor, mientras que la relación entre la rigidez aparente a flexión y a cortadura interlaminar  $E^b_{xx}/G_{xz}$  se ha variado cambiando la secuencia de apilamiento.

Se ha establecido un rango de ratios de esbeltez entre 5 y 30, dentro del cual se considera que puede ser necesario tener en cuenta tanto los esfuerzos de flexión y como los de cortadura. El límite superior viene determinado por la norma para ensayos de flexión estáticos en tres puntos sobre materiales compuestos, ASTM D790-98, a partir de esa esbeltez, la norma considera que las tensiones de cortadura son despreciables frente a las producidas por el esfuerzo flector. El límite inferior se ha establecido en 5 porque para ratios de esbeltez inferiores, las tensiones de cortadura son las predominantes y ya no se trata de un problema de flexión sino de cortadura, tal como se recoge en la norma para ensayos de cortadura estática ASTM D2344.



El otro parámetro estudiado es la relación entre la rigidez aparente a flexión y a cortadura interlaminar. Cuanto más anisótropo sea un laminado mayor será esta relación, y aumentarán las diferencias entre la teoría clásica del laminado y la teoría de cortadura de primer orden, en materiales isótropos este parámetro tiene un valor aproximado de 2,6. En el laminado se ha variado cambiando la orientación de las láminas, se han elegido cuatro laminados diferentes con el mismo número de láminas:  $[0]_8$ ,  $[0/90]_{2s}$ ,  $[90/0]_{2s}$  y  $[90/0/45/-45]_s$ .

Secuencia de apilamiento	$E^b_{xx}/G_{xz}$
$[0]_8$	19,25
$[0/90]_{2s}$	18,47
$[90/0]_{2s}$	9,32
$[90/0/45/-45]_s$	6,95

Tabla 3.1. Secuencias de apilamiento.

Al variar  $E^b_{xx}/G_{xz}$  se está añadiendo un parámetro más al problema estudiado: la cantidad de láminas con diferente orientación. Este parámetro afecta a los distintos métodos empleados para el cálculo del factor de cortante: cuantas más láminas con diferente orientación tenga el laminado, mayor será la diferencia en el valor de  $K$  obtenido con distintos métodos.

El objetivo de este estudio estático ha sido establecer un valor de la esbeltez de la viga para cada secuencia de apilamiento, por encima de la cual las distintas teorías empleadas presentan unas diferencias menores al 5% en los resultados. Se ha escogido el valor del 5% porque se considera una aproximación suficientemente ajustada para poder despreciar las tensiones de cortadura interlaminar.

Con este valor de esbeltez se ha realizado un estudio dinámico del problema en el que el principal parámetro de estudio es el tiempo de aplicación de la carga. Al variar el tiempo de aplicación de la carga, se ha analizado únicamente la influencia de las fuerzas de inercia, ya que se ha supuesto que las propiedades del material

no varían con la velocidad de deformación. El rango de tiempos de aplicación de la carga se ha establecido en función del tiempo característico de oscilación de cada viga,  $0,03t_c < t < 3t_c$ . Por encima de tres veces el tiempo característico se produce una disminución considerable de la influencia de las fuerzas de inercia y se puede suponer que la carga se aplica en condiciones estáticas. Cuando el tiempo de aplicación de la carga es menor al límite inferior establecido, las ondas elásticas no alcanzan los extremos de la viga y, por tanto, no influyen las condiciones de contorno y la respuesta de la estructura no es global, siendo necesario emplear modelos basados en la teoría de ondas.

### **Variables de análisis**

Para analizar la influencia de estos parámetros, tanto en el estudio estático como en el dinámico, se han empleado dos variables que proporcionan una buena información del comportamiento de la estructura: el desplazamiento máximo y el valor del criterio de Tsai-Hill. El valor de estas dos variables ha sido calculado en el punto medio de la viga al aplicar una carga unitaria.

La primera variable es el máximo desplazamiento vertical que se produce durante el cálculo en la sección central de la viga, que coincide con el punto de aplicación de la carga y el punto donde dicho desplazamiento alcanza su máximo. En esta variable influyen los esfuerzos de flexión y, en el caso de la teoría de cortadura de primer orden, también los esfuerzos de cortadura interlaminar.

La segunda variable es el valor del criterio de Tsai-Hill en su variante tridimensional. Se ha elegido este parámetro para ponderar todas las tensiones con un valor de resistencia. Si se emplea como parámetro una variable tensional, por ejemplo la tensión de Von Mises, no se tiene en cuenta que los laminados son especialmente sensibles a las tensiones de cortadura interlaminar. Sin embargo, empleando el criterio de Tsai-Hill, queda reflejada la influencia significativa que

tienen las tensiones de cortadura aunque sean de menor orden de magnitud que las tensiones normales, ya que la resistencia a cortadura interlaminar de estos materiales también es de menor orden de magnitud que la resistencia en dirección de las fibras.

Esta variable se ha definido como:

$$V_{SH} = \left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right) + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{13}}{S_{13}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{S_{23}}\right)^2 \quad (3.19)$$

siendo:

- X la resistencia de la lámina a tracción o compresión en dirección de las fibras.
- Y la resistencia de la lámina a tracción o compresión en dirección perpendicular a la de las fibras.
- Z la resistencia de la lámina a tracción o compresión en dirección perpendicular al plano.
- $S_{12}$  la resistencia de la lámina a cortadura en el plano.
- $S_{13}$  la resistencia de la lámina a cortadura interlaminar en la dirección de las fibras.
- $S_{23}$  la resistencia de la lámina a cortadura en dirección perpendicular a la de las fibras.

Se ha empleado el valor de la resistencia a tracción o compresión en función del carácter positivo o negativo del valor de la tensión.

### 3.2.3. Resultados del análisis estático

El objetivo principal de este análisis ha sido establecer los ratios de esbeltez para los cuales las diferencias entre los modelos empleados sean significativas. Este ratio de esbeltez es diferente según la anisotropía del material, es decir, depende de la secuencia de apilamiento. El desplazamiento máximo de la viga y el valor del criterio de Tsai-Hill en la sección central de la viga producidos al aplicar una carga unitaria, han sido las variables empleadas para establecer los ratios de esbeltez.

#### Desplazamiento máximo

En primer lugar, se ha calculado el desplazamiento máximo producido en una viga para valores de  $L/h$  entre 5 y 30, empleando las cuatro secuencias de apilamiento diferentes.

En este estudio se ha prestado una mayor atención a las diferencias que aparecen entre los distintos modelos empleados que a los valores numéricos del desplazamiento. Se ha calculado la diferencia entre la teoría del laminado respecto de la teoría de cortadura de primer orden, empleando los tres métodos para el cálculo del factor de cortante ( $TL\&MCT$ ,  $TL\&MCM$  y  $TL\&MCR$ ), y la diferencia entre el método clásico de Timoshenko respecto de los otros dos métodos para el cálculo de  $K$  ( $MCT\&MCM$  y  $MCT\&MCR$ ). Las diferencias se representan en la siguiente figura:

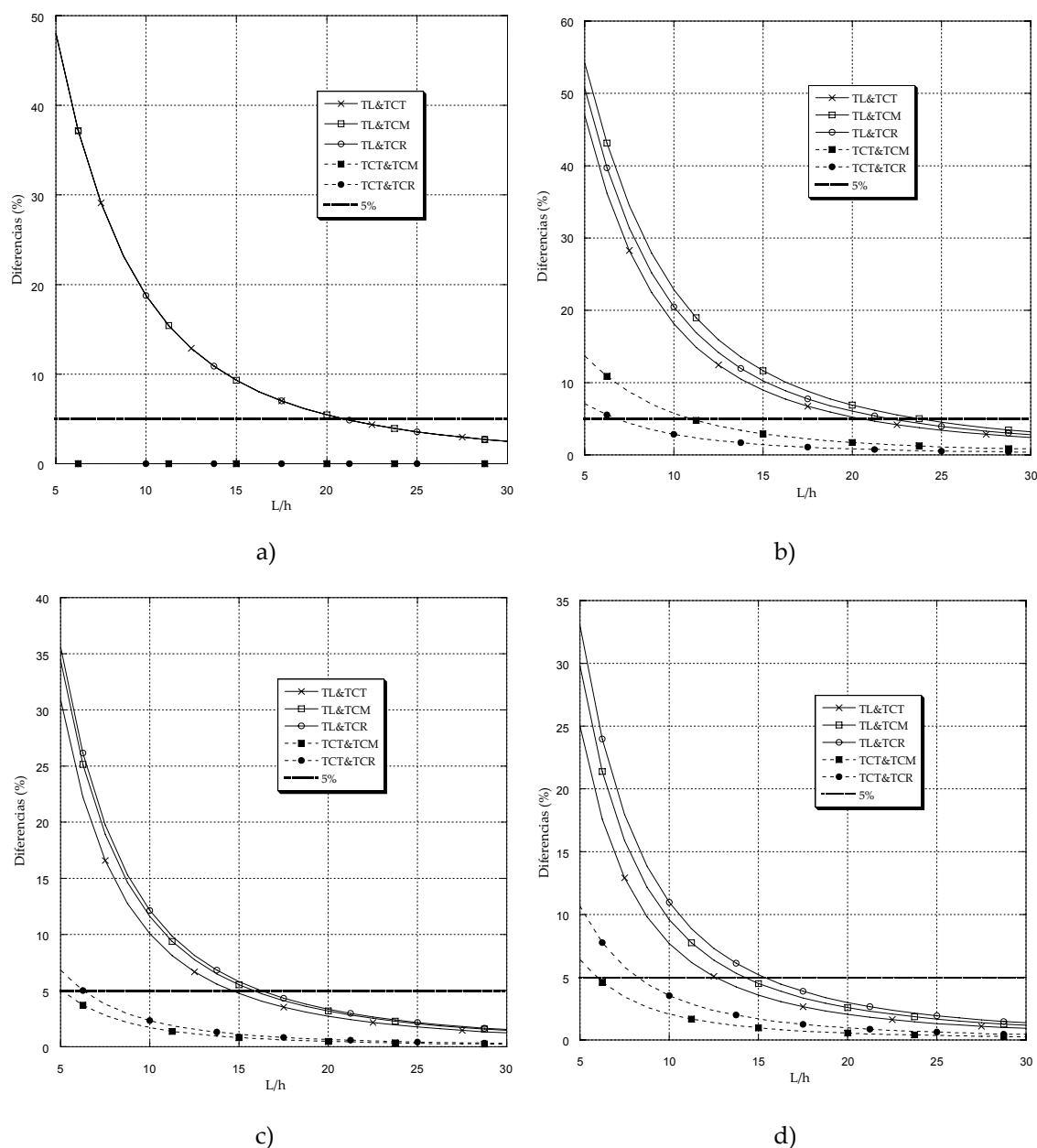


Figura 3.5. Diferencias entre los distintos modelos en el cálculo del desplazamiento máximo en función de la esbeltez, en condiciones estáticas: a)  $[0]_8$ , b)  $[0/90]_{2S}$ , c)  $[90/0]_{2S}$ , d)  $[90/0/45/-45]_S$ .

En primer lugar, se puede comprobar que al aumentar la esbeltez de la viga las tensiones de cortadura tienen menor importancia relativa respecto de las producidas por los esfuerzos de flexión, como consecuencia existen menores diferencias entre los modelos empleados al aumentar la esbeltez.

Si se comparan los resultados de la teoría del laminado con los de los distintos modelos de la teoría de cortadura de primer orden, se observa como al aumentar

la anisotropía del laminado las diferencias entre estas teorías se hacen mayores. Para el laminado  $[90/0/45/-45]_s$ , las diferencias entre ambas teorías nunca alcanzan el 35% y se hacen menores al 5% cuando el ratio de esbeltez supera un valor de 15; en cambio, para el laminado  $[0]_8$  estas diferencias alcanzan casi el 50% y se hacen menores al 5% sólo si la esbeltez de la viga es superior a 20. Estos datos justifican la recomendación de la norma ASTM D790-98 de emplear una esbeltez superior a 30 para laminados altamente anisótropos. El laminado  $[90/0]_{2s}$  tiene una relación  $E^b_{xx}/G_{xz}$  mayor que el laminado cuasi-isótropo por lo que la esbeltez requerida también es superior.

El laminado  $[0/90]_{2s}$  tiene una relación  $E^b_{xx}/G_{xz}$  ligeramente inferior al laminado unidireccional de modo que si se emplea el factor de cortante clásico, que tiene el mismo valor en ambos laminados, la esbeltez requerida también es algo menor. Si por el contrario, se emplea cualquiera de los otros dos factores de cortante, la esbeltez requerida en el laminado  $[0/90]_{2s}$  es superior a la del laminado  $[0]_8$  a pesar de tener una menor relación  $E^b_{xx}/G_{xz}$ . Esto es debido a que tanto con el método modificado como con el de Madabhushi-Raman y Davalos el factor de cortante es mayor para el laminado  $[0/90]_{2s}$  que para el unidireccional.

La comparación entre los distintos métodos empleados para el cálculo del factor de cortante es algo más compleja, dado que se está comparando el comportamiento global de la estructura y no sólo el valor de las tensiones de cortadura. El caso del laminado unidireccional es el más sencillo de analizar, todas las láminas tienen la misma orientación por lo que todos los métodos presentan idénticos resultados. En el laminado cuasi-isótropo las diferencias entre los modelos son significativas, mayores al 5%, para una esbeltez inferior a un ratio entre 6 y 8, dependiendo qué métodos se comparen. En el laminado  $[90/0]_{2s}$  esto ocurre para una esbeltez inferior, entre 5 y 6, puesto que hay un menor número de láminas con diferente orientación. En cambio, para el laminado  $[0/90]_{2s}$  las diferencias son mayores que en el laminado  $[90/0]_{2s}$  a pesar de que las láminas

tienen idéntica orientación, esto se debe a que las tensiones de cortadura tienen un valor mayor porque la relación  $E_{xx}^b/G_{xz}$  es mayor.

La siguiente tabla muestra los valores del ratio de esbeltez a partir de los cuales las diferencias entre los distintos modelos se hacen inferiores al 5% en cada secuencia de apilamiento.

Laminado	[0] <sub>8</sub>	[0/90] <sub>2s</sub>	[90/0] <sub>2s</sub>	[90/0/45/-45] <sub>s</sub>
$E_{xx}^b/G_{xz}$	19,25	18,47	9,32	6,95
TL&TCT	20,75	20,50	14,50	12,50
TL&TCM	20,75	23,75	15,75	14,25
TL&TCR	20,75	22,00	16,25	15,25
TCT&TCM	0,00	11,00	5,00	6,00
TCT&TCR	0,00	7,00	6,25	8,25

Tabla 3.2. Ratios de esbeltez que proporcionan diferencias menores a 5% en función de  $E_{xx}^b/G_{xz}$ , utilizando como variable de comparación el desplazamiento máximo estático.

En la siguiente figura se muestran estos ratios de esbeltez en función del modelo empleado y de la relación entre la rigidez aparente a flexión y a cortadura interlaminar. Los datos disponibles están entre los valores de esbeltez estudiados, no se dispone de información para ratios de esbeltez superiores a 30 o inferiores a 5.

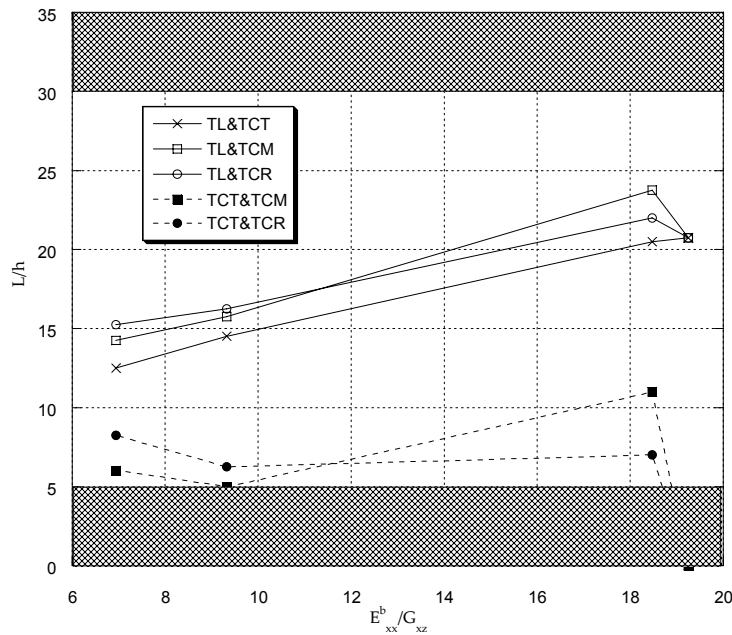


Figura 3.6. Ratios de esbeltez que proporcionan diferencias menores a 5% en función de  $E^b_{xx}/G_{xz}$  utilizando como variable de comparación el desplazamiento máximo estático.

En esta figura se observa como aumentan las diferencias entre la teoría del laminado respecto de la teoría de cortadura al aumentar la relación entre la rigidez aparente a flexión y a cortadura. Por otro lado, en la comparación de los modelos de cortadura se observa que hay dos efectos superpuestos: la diferencia en el cálculo del factor de cortante y la importancia relativa de las tensiones de cortadura. Para dos laminados con parecida relación  $E^b_{xx}/G_{xz}$  la diferencia entre los modelos es menor para el que tenga menor número de láminas con distinta orientación, como ocurre con el laminado unidireccional frente al  $[0/90]_{2S}$ , o con el  $[90/0]_{2S}$  frente al cuasi-isótropo. En cambio, si se comparan los laminados  $[0/90]_{2S}$  y  $[90/0]_{2S}$  se observa que las diferencias son mucho mayores para el primero a pesar de tener idéntica orientación en sus láminas puesto que las tensiones de cortadura son también mayores al tener mayor relación  $E^b_{xx}/G_{xz}$ .



### Criterio de Tsai-Hill

En primer lugar, se han calculado las tensiones de cortadura interlaminar para analizar las diferencias entre los modelos de la teoría de cortadura de primer orden. Las tensiones de cortadura son independientes de la esbeltez de la viga por lo que se obtiene un único valor para cada laminado, los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Laminado	[0] <sub>s</sub>	[0/90] <sub>2s</sub>	[90/0] <sub>2s</sub>	[90/0/45/-45] <sub>s</sub>
$E^b_{xx}/G_{xz}$	19,25	18,47	9,32	6,95
TCT&TCM	0 %	7 %	2 %	7 %
TCT&TCR	0 %	14 %	32 %	19 %
TCM&TCR	0 %	8 %	31 %	24 %

Tabla 3.3. Diferencias en los valores de las tensiones de cortadura interlaminar entre los distintos métodos para el cálculo del factor de cortante.

En la tabla 3.3 se puede observar como los tres métodos coinciden en el caso de que todas las láminas tengan la misma orientación, pero en el momento en que esto no ocurre las diferencias pueden llegar a superar el 30%.

La importancia que puedan tener estas diferencias es relativa, puesto que hay que considerarlas como una parte dentro de un estado tensional. Como ya se ha explicado, se ha calculado el criterio de Tsai-Hill para realizar una ponderación del estado tensional de la viga.

En la siguiente figura se presentan las diferencias observadas en los resultados de cada modelo empleando como variable de comparación el criterio de Tsai-Hill.

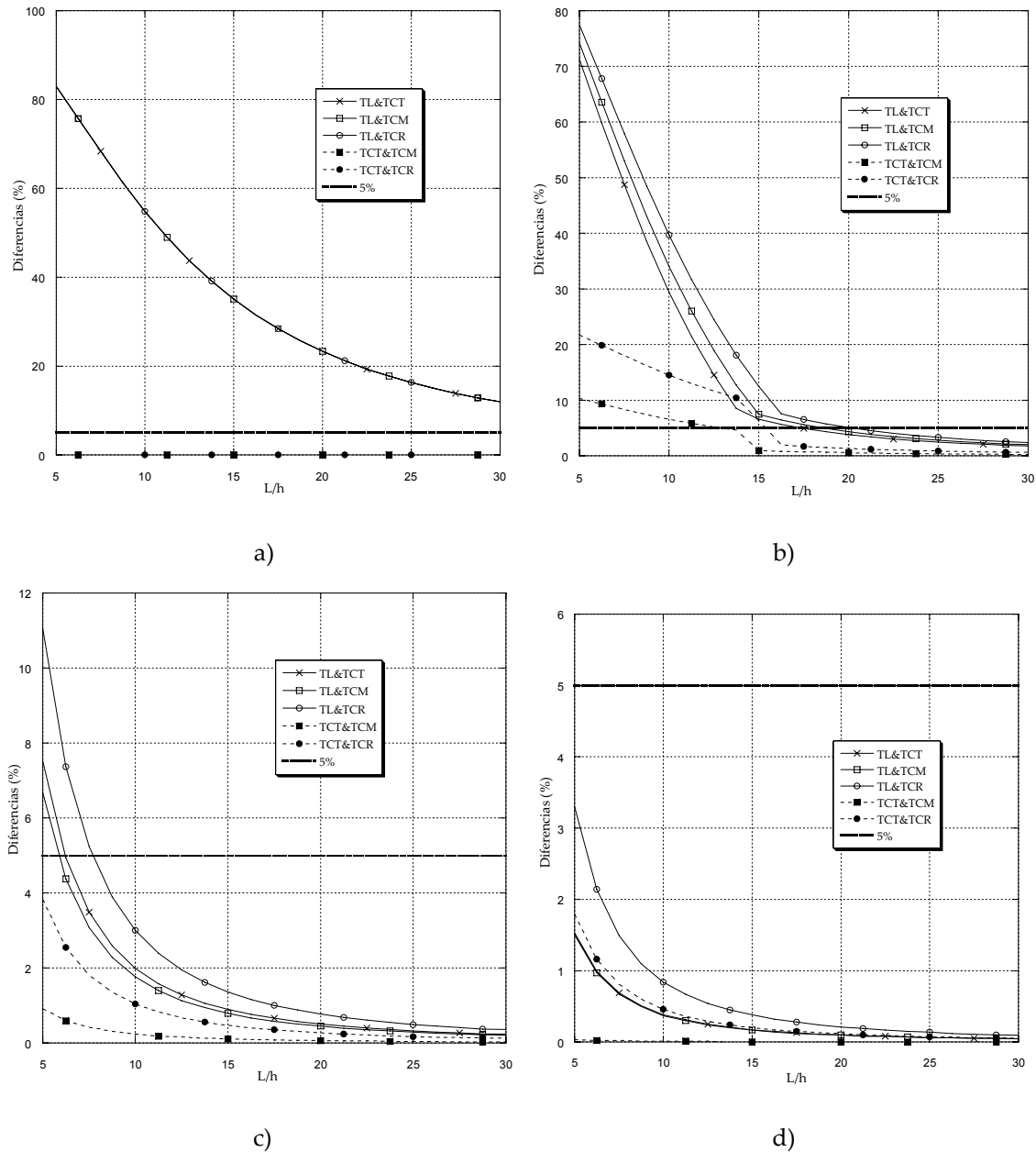


Figura 3.7. Diferencias entre los distintos modelos en el cálculo del criterio de Tsai-Hill en función de la esbeltez en condiciones estáticas: a)  $[0]_8$ , b)  $[0/90]_{2S}$ , c)  $[90/0]_{2S}$ , d)  $[90/0/45/-45]_S$ .

En todos los casos se observa una tendencia similar, al disminuir el ratio de esbeltez se aumenta la influencia de las tensiones de cortadura.

La primera diferencia significativa se observa en el laminado  $[0/90]_{2S}$ , cuando el ratio de esbeltez varía en torno a 15 se produce un cambio de pendiente brusco en las curvas representadas. Esto se debe a que el criterio de Tsai-Hill alcanza su valor máximo en diferentes láminas según se emplee la teoría clásica del laminado

o la teoría de cortadura de primer orden. Según la teoría del laminado el valor máximo del criterio de Tsai-Hill aparece siempre en la última lámina orientada a  $90^\circ$ , según la teoría de cortadura el valor máximo se encuentra en dicha lámina cuando la esbeltez es mayor de 15, si la esbeltez es menor el fallo se produce en la primera lámina que está orientada a  $0^\circ$ .

Las diferencias entre la teoría de cortadura y la teoría del laminado son más dependientes de la relación entre la rigidez aparente a flexión y a cortadura que en el estudio de los desplazamientos. Para el laminado más anisótropo, el unidireccional, las diferencias son mayores al 10% en todos los casos analizados, mientras que para el laminado cuasi-isótropo las diferencias son siempre menores al 5%

La tabla 3.4 muestra los valores del ratio de esbeltez para los cuales las diferencias entre los distintos modelos son superiores al 5% para cada secuencia de apilamiento.

Laminado	$[0]_8$	$[0/90]_{25}$	$[90/0]_{25}$	$[90/0/45/-45]_5$
$E^b_{xx}/G_{xz}$	19,25	18,47	9,32	6,95
TL&TCT	>30	17,50	6,25	<5
TL&TCM	>30	18,75	5,75	<5
TL&TCR	>30	20,00	7,25	<5
TCT&TCM	0	12,50	<5	<5
TCT&TCR	0	15,50	<5	<5

Tabla 3.4. Ratios de esbeltez que proporcionan diferencias menores a 5% en función de  $E^b_{xx}/G_{xz}$  utilizando como variable de comparación el criterio de Tsai-Hill.

Al igual que en el estudio del desplazamiento, a continuación se muestran estos resultados gráficamente, figura 3.8.

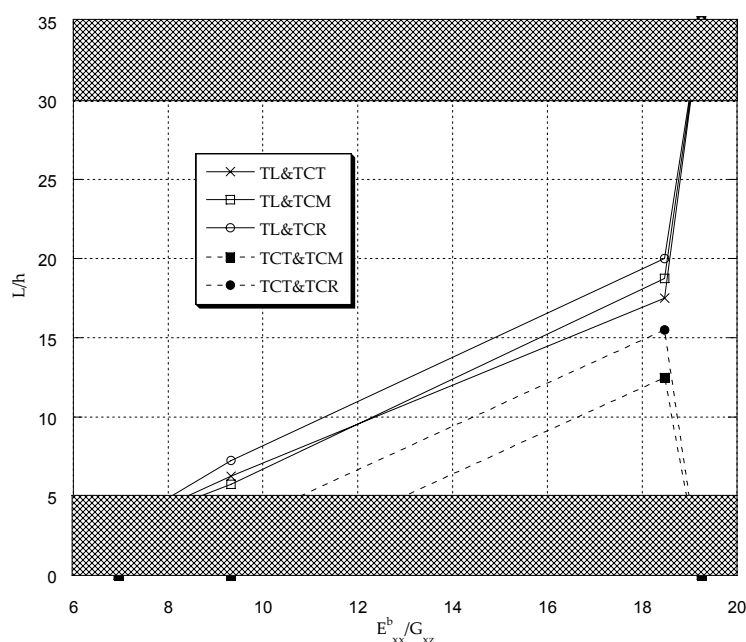


Figura 3.8. Ratios de esbeltez que proporcionan diferencias menores a 5% en función de  $E^b_{xx}/G_{xz}$  utilizando como variable de comparación el criterio de Tsai-Hill.

Analizando la diferencia entre la teoría del laminado y la teoría de cortadura de primer orden, se observa la misma tendencia comparando las tensiones que comparando los desplazamientos. Cuando aumenta la relación  $E^b_{xx}/G_{xz}$  también lo hace la diferencia entre estas dos teorías, en el caso de las tensiones de una forma más acusada que en el de los desplazamientos. Así se observa que se requiere una esbeltez superior a 30 en laminados altamente anisótropos.

A la hora de comparar los diferentes métodos de cálculo de  $K$  en los dos últimos laminados, las tensiones de cortadura no son significativas y no se producen diferencias entre los modelos empleados mayores al 5%. En el laminado unidireccional todas las láminas tienen idéntica orientación, por lo que no existe ninguna diferencia entre los modelos. En el laminado  $[0/90]_{25}$  las diferencias entre los modelos de la teoría de cortadura se hacen significativas para una esbeltez en torno a 15.

Uno de los objetivos del estudio estático ha sido establecer un ratio de esbeltez adecuado para continuar con el análisis dinámico. A la vista de la gran dispersión

de los resultados, tablas 3.2 y 3.4, no resulta fácil la elección. Se ha escogido un valor de  $L/h=15$ , ya que para este valor las diferencias entre la teoría clásica del laminado y la teoría de cortadura de primer orden superan el 5% en la mayoría de los casos. Si se compara el desplazamiento máximo el 5% se supera en todos los laminados y si se compara el valor del criterio de Tsai-Hill sólo en los dos primeros laminados. Según estos resultados para un ratio de esbeltez inferior o igual a 15 es necesario emplear la teoría de cortadura de primer orden.

Por otro lado, las diferencias entre los distintos métodos para el cálculo del factor de corrección de cortadura en una viga con esta esbeltez son menores al 5% en casi todos los casos. Comparando el desplazamiento máximo es inferior en todos los laminados y comparando el valor del criterio de Tsai-Hill en todos excepto el  $[90/0]_{2s}$ . A la vista de estos resultados, para una esbeltez de 15 en un caso estático se puede tomar como valor del coeficiente de corrección de cortadura  $K=5/6$  sin cometer un error mayor del 5%.

### 3.2.4. Resultados del análisis dinámico

Una vez decidido que una esbeltez de  $L/h=15$  es adecuada para comparar los diferentes modelos, se ha realizado el análisis del comportamiento dinámico de las vigas de material compuesto de tipo laminado.

En primer lugar, se han calculado las frecuencias propias para establecer los tiempos característicos de oscilación. Posteriormente, se ha procedido al estudio del movimiento forzado variando el tiempo de aplicación de la carga. Se han analizado las diferencias entre los resultados obtenidos calculando el desplazamiento máximo y el valor del criterio de Tsai-Hill para los cuatro laminados.

El tiempo ha sido adimensionalizado con el tiempo característico de la viga para comparar mejor los resultados. El tiempo característico se obtiene mediante la

inversa de la primera frecuencia propia y, por tanto, habría tantos tiempos característicos como modelos empleados para calcular dicha frecuencia propia. Para que todos los resultados se expresen en el mismo tiempo absoluto, se ha calculado el tiempo característico mediante la teoría de cortadura de primer orden, empleando el factor de cortante tradicional,  $K=5/6$ .

### Frecuencias Propias

El primer análisis realizado ha sido la comparación de las frecuencias propias de oscilación de cada viga. En la siguiente tabla se muestra el valor de la primera frecuencia propia calculada con los distintos modelos simplificados en función del valor de  $E^b_{xx}/G_{xz}$  de cada laminado. La primera frecuencia propia aumenta con la relación  $E^b_{xx}/G_{xz}$ , a mayor rigidez a flexión mayor es la primera frecuencia propia.

Laminado	[0] <sub>8</sub>	[0/90] <sub>2S</sub>	[90/0] <sub>2S</sub>	[90/0/45/-45] <sub>S</sub>
$E^b_{xx}/G_{xz}$	19,25	18,47	9,32	6,95
TL	11700	9860	7010	6050
TCT	11200	9490	6870	5960
TCM	11200	9510	6860	5960
TCR	11200	9430	6840	5920

Tabla 3.5. Primera frecuencia propia de oscilación de la viga en función de  $E^b_{xx}/G_{xz}$ .

En la figura 3.9 se muestran las diferencias entre los modelos empleados para el cálculo de la primera frecuencia propia. Las diferencias entre los métodos para el cálculo de  $K$  son muy pequeñas, su valor es siempre menor al 1%. La diferencia entre la teoría clásica del laminado y la teoría de cortadura de primer orden es algo mayor, siendo también bastante pequeña, en ningún caso supera el 5%. Al igual que en el caso estático las diferencias aumentan con la anisotropía del material, es decir, cuando aumenta la relación entre la rigidez aparente a flexión y a cortadura.

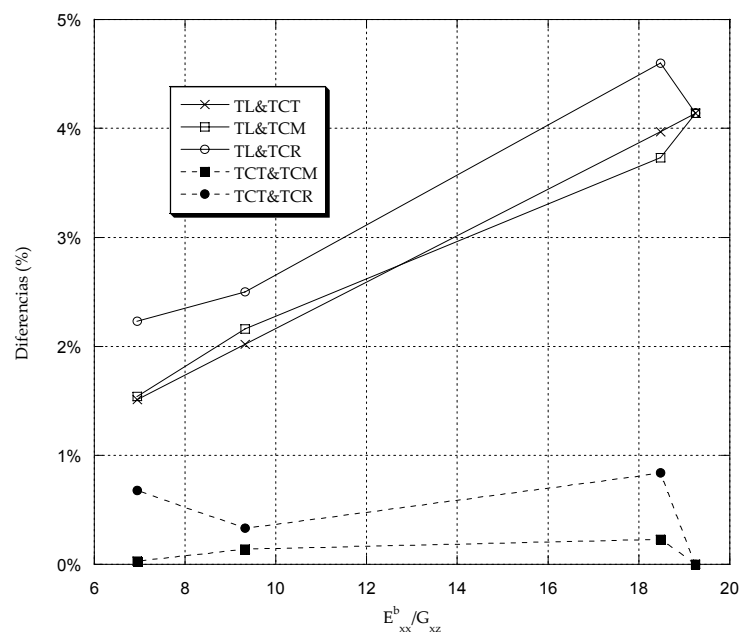


Figura 3.9. Diferencias entre los modelos empleados para el cálculo de la primera frecuencia propia de la viga en función de  $E_{xx}^b/G_{xz}$ .

### Desplazamiento máximo

Al igual que en el análisis estático se han comparado los distintos modelos empleando como variable de comparación el desplazamiento vertical máximo. En la figura 3.10 se muestra, a modo de ejemplo, el desplazamiento vertical máximo para el laminado  $[0/90]_{2S}$ . El desplazamiento se ha adimensionalizado con el valor del desplazamiento vertical máximo, obtenido en condiciones estáticas utilizando el método clásico de Timoshenko para el cálculo de  $K$ , mientras que el tiempo de aplicación de la carga ha sido adimensionalizado con el tiempo característico de la viga.

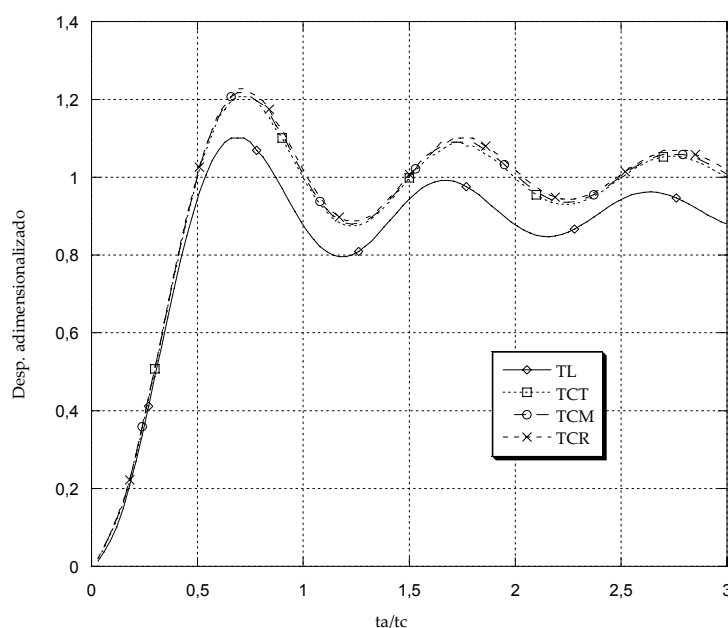


Figura 3.10. Desplazamiento dinámico vertical máximo adimensionalizado, calculado en el laminado  $[0/90]_{2S}$  en función del tiempo adimensionalizado.

El comportamiento global del resto de laminados es similar al de esta la viga: cuando el tiempo de aplicación de la carga es muy pequeño también lo es el desplazamiento y cuando el tiempo de aplicación aumenta también lo hace el desplazamiento, oscilando en torno a una posición de equilibrio que coincide con el desplazamiento máximo en condiciones estáticas. Estas oscilaciones son cada vez menores, de modo que para un tiempo de aplicación de la carga muy superior al tiempo característico de la viga los resultados coinciden con los que se obtienen en condiciones estáticas. Para los menores tiempos de aplicación de la carga estos modelos no son válidos ya que sería necesario emplear modelos que consideren la teoría de propagación de ondas.

Al igual que en el análisis estático, el estudio se ha centrado en las diferencias que se producen entre los resultados de los distintos modelos empleados. En la figura 3.11 se muestran las diferencias observadas en el cálculo del desplazamiento dinámico en los cuatro laminados.



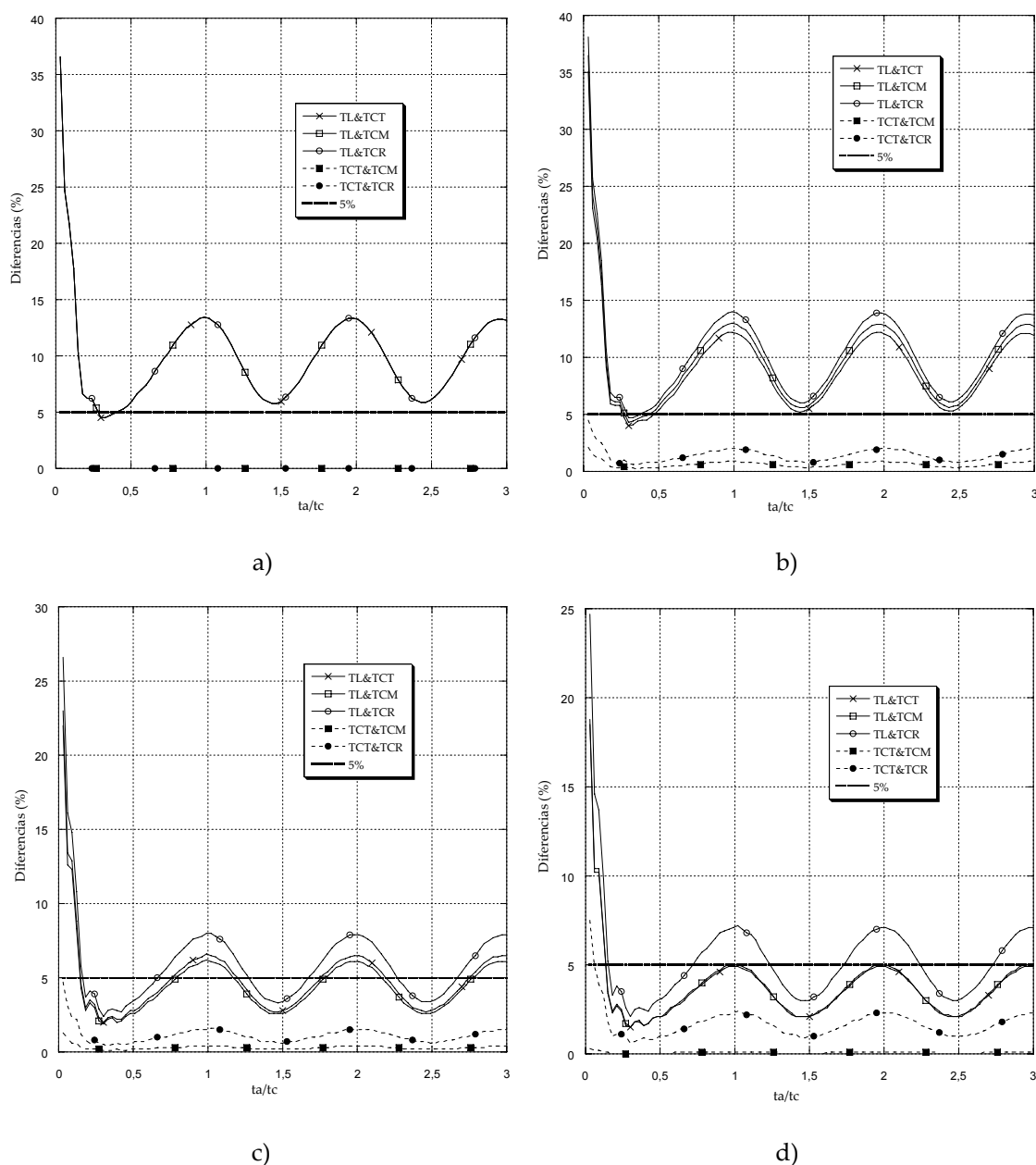


Figura 3.11. Diferencias entre los distintos modelos en el cálculo del desplazamiento vertical máximo en condiciones dinámicas: a)  $[0]_8$ , b)  $[0/90]_{25}$ , c)  $[90/0]_{25}$ , d)  $[90/0/45/-45]_s$ .

En los cuatro laminados se observa una tendencia muy parecida, cuando el tiempo de aplicación de la carga es muy pequeño, menor a 0,3 veces el tiempo característico, las diferencias entre los modelos empleados son muy grandes, en algunos casos superan el 35%. En cambio, cuando el tiempo de aplicación de la carga supera 0,5 veces el tiempo característico, las diferencias oscilan en torno a un valor más moderado. Este valor no es mucho mayor que el valor que presentan en condiciones estáticas, pero debido a las oscilaciones, cuando el tiempo de

aplicación de la carga es cercano al tiempo característico de oscilación, las diferencias pueden llegar a ser el doble de las observadas en el análisis estático. Este fenómeno de oscilación de las diferencias se debe a que el valor del desplazamiento también sufre oscilaciones, figura 3.10, y la frecuencia de oscilación del desplazamiento depende del modelo empleado para su cálculo. De esta forma, al comparar distintos modelos, el desplazamiento calculado oscila a una frecuencia diferente en cada uno de ellos y, por tanto, las diferencias entre ellos también sufren oscilaciones.

Al comparar los resultados en los distintos laminados se observa la misma tendencia que en el caso estático, a mayor relación  $E^b_{xx}/G_{xz}$  mayor diferencia entre la teoría del laminado y la teoría de cortadura de primer orden, y a mayor número de láminas con diferente orientación, mayor diferencia entre los métodos para el cálculo del factor de cortante. Como ya se comprobó en el análisis estático, los distintos métodos para el cálculo de  $K$  coinciden en el laminado unidireccional por lo que no aparecen diferencias entre ellos.

En todos los casos estudiados se ha comprobado que la diferencia entre la teoría clásica del laminado y los modelos de la teoría de cortadura de primer orden es mayor en condiciones dinámicas que en condiciones estáticas, esto es debido a que a las diferencias producidas en un análisis estático hay que sumar las producidas por considerar la inercia del giro de la sección. Las diferencias no sólo son mayores debido a las oscilaciones producidas sino que su valor promedio también es mayor.

### Criterio de Tsai-Hill

Al igual que en el análisis estático, se ha realizado una comparación entre los distintos modelos en condiciones dinámicas empleando como variable de comparación el criterio de Tsai-Hill.

En la figura que se muestra a continuación, aparece representada la variable de comparación basada en el criterio de Tsai-Hill para el laminado  $[0/90]_{2S}$  en función del tiempo de aplicación de la carga, según los distintos modelos empleados en el análisis. El valor del criterio de Tsai-Hill ha sido adimensionalizado con el valor obtenido en condiciones estáticas empleando el modelo clásico de Timoshenko.

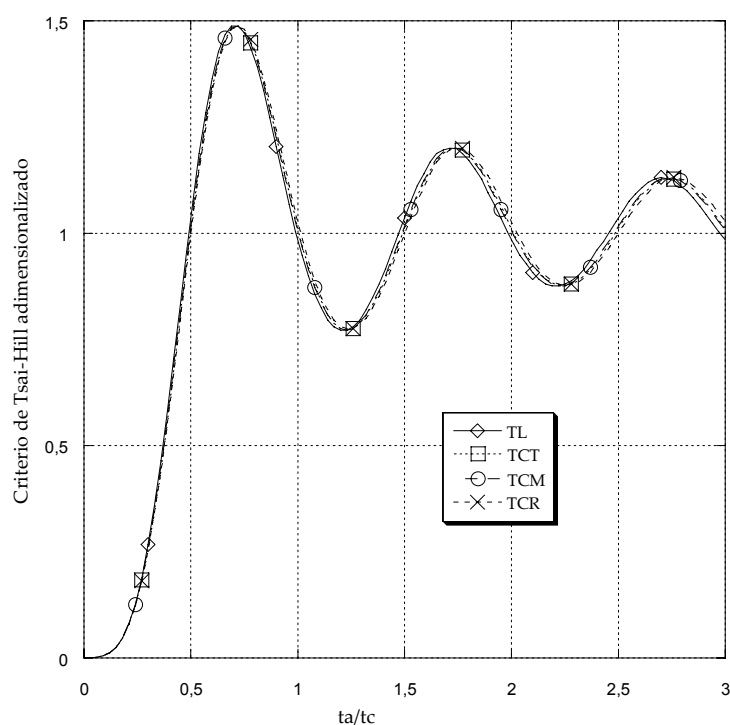


Figura 3.12. Valor del criterio de Tsai-Hill adimensionalizado calculado en el laminado  $[0/90]_{2S}$  en función del tiempo de aplicación de la carga adimensionalizado.

Al igual que ocurre con el desplazamiento vertical, cuando el tiempo de aplicación de la carga es muy pequeño también lo es el valor del criterio de Tsai-Hill. Cuando se aumenta el tiempo de aplicación de la carga también aumenta el valor del criterio de Tsai-Hill oscilando en torno un valor cercano al obtenido en condiciones estáticas.

En la figura 3.13 se muestran las diferencias entre los modelos empleados en el cálculo del criterio de Tsai-Hill para los cuatro laminados.

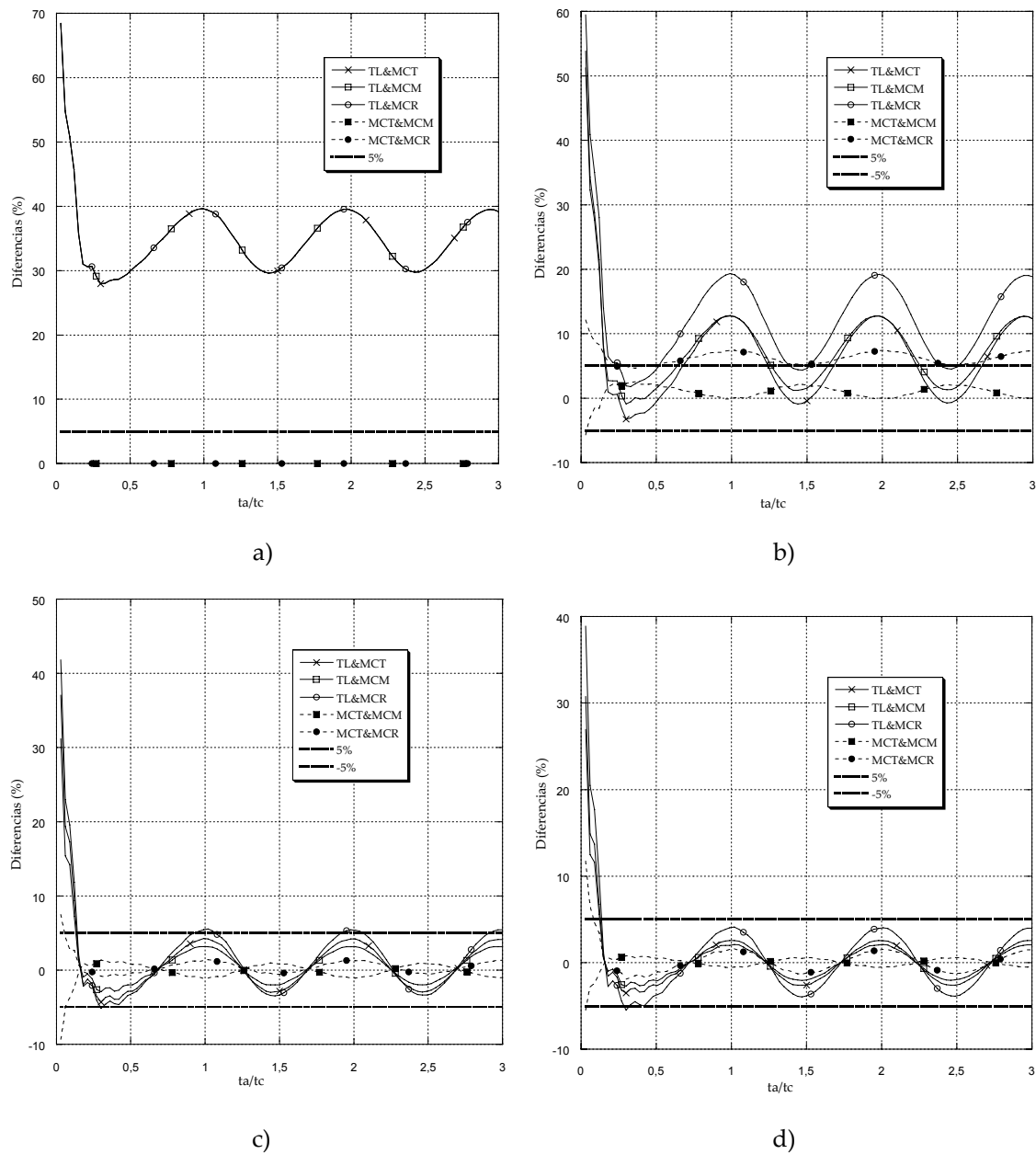


Figura 3.13. Diferencias entre los distintos modelos en el cálculo del criterio de Tsai-Hill en condiciones dinámicas: a)  $[0]_s$ , b)  $[0/90]_{2s}$ , c)  $[90/0]_{2s}$ , d)  $[90/0/45/-45]_s$ .

Los resultados observados en el estudio de las tensiones son muy similares a los obtenidos analizando el desplazamiento vertical máximo. Cuando el tiempo de aplicación de la carga es muy pequeño, menor a 0,2 veces el tiempo característico, las diferencias entre los modelos son muy grandes. Cuando el tiempo de

aplicación de la carga es mayor a 0,3 veces el tiempo característico las diferencias oscilan en torno a un valor algo mayor que el obtenido en condiciones estáticas, estas oscilaciones hacen que las diferencias puedan alcanzar un valor mucho mayor en condiciones dinámicas que en estáticas. En el caso del laminado  $[90/0]_{2s}$ , por ejemplo, las diferencias entre la teoría del laminado y la teoría de cortadura de primer orden calculando  $K$  con el método de Madabhusi-Raman y Davalos en condiciones estáticas son menores de 1,5%, figura 3.7, y la diferencia en el cálculo de la primera frecuencia propia es de 2,5%, figura 3.9, pero en condiciones dinámicas la diferencia supera el 5% si el tiempo de aplicación de la carga coincide con el tiempo característico.

Las diferencias entre el desplazamiento máximo dinámico calculado con los distintos modelos nunca superan el 15% a partir de 0,2 veces el tiempo característico, en cambio, las diferencias entre el valor del criterio de Tsai-Hill obtenido con esos mismos modelo supera claramente el 15% en los dos laminados más anisótropos. Se comprueba que, aunque las tensiones de cortadura no tengan un valor suficiente para contribuir significativamente en el desplazamiento, pueden influir en la rotura del laminado debido a la baja resistencia que presenta este material frente a tensiones de cortadura interlaminar.

El método de las funciones de influencia se ha aplicado al cálculo de los desplazamientos dinámicos de vigas de un laminado  $[0/90]_{2s}$  con esta geometría. En este caso, las diferencias entre la teoría del laminado y la teoría de cortadura de primer orden oscilan entre un 5% y un 15%, sin embargo, las diferencias entre los distintos métodos para el cálculo del factor de cortante no superan el 2%. A la vista de estos resultados se ha seleccionado la teoría de cortadura de primer orden con el factor de cortante clásico,  $K=5/6$ , para los siguientes estudios.

### 3.3. Validación del método de las funciones de influencia en el cálculo de desplazamientos dinámicos en laminados

Una de las principales ventajas del método de las funciones de influencia es que el algoritmo de cálculo es independiente de las condiciones de contorno, al cambiar las condiciones de contorno sólo varían las funciones de influencia que se calculan en condiciones estáticas. En este estudio esta herramienta se ha aplicado al cálculo de los desplazamientos en una viga con diferentes condiciones de contorno constituida por un laminado  $[0/90]_{2s}$ . Las condiciones de contorno aplicadas en los extremos han sido: empotrada-libre, apoyada-apoyada, empotrada-apoyada y empotrada-empotrada, figura 3.1.

#### 3.3.1. Método de las funciones de influencia

Para aplicar el método de las funciones de influencia a una viga modelizada con la teoría de cortadura de primer orden e incluyendo el acoplamiento flexión torsión hay que modificar la ecuación 2.48. Aunque en este apartado no se ha considerado el fenómeno de acoplamiento entre esfuerzos, éste se ha incluido en la exposición del método de las funciones de influencia para no tener que repetir la explicación en el siguiente apartado.

Al añadir los términos correspondientes a las tensiones de cortadura y de torsión la ecuación 2.48 se debe transformar en una ecuación matricial.

$$\vec{\delta}(x,t) = \int_0^L C(x,\xi) \cdot \vec{p}(\xi,t) d\xi \quad (3.20)$$

En este caso  $\vec{\delta}(x,t)$  es un vector que contiene el desplazamiento vertical  $w(x,t)$ , el giro de flexión  $\phi_x(x,t)$  y el giro de torsión  $\phi_y(x,t)$ .

$$\vec{\delta}(x,t) = \begin{pmatrix} w(x,t) \\ \phi_x(x,t) \\ \phi_y(x,t) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Las funciones de influencia están contenidas en una matriz,  $[C(x,\xi)]$ .

$$C(x,\xi) = \begin{pmatrix} C^{ww}(x,\xi) & C^{wf}(x,\xi) & C^{wt}(x,\xi) \\ C^{fw}(x,\xi) & C^{ff}(x,\xi) & C^{ft}(x,\xi) \\ C^{tw}(x,\xi) & C^{tf}(x,\xi) & C^{tt}(x,\xi) \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

donde cada función de influencia tiene un sentido físico:  $C^{ww}(x,\xi)$  es el desplazamiento vertical producido en el punto  $x$  al aplicar una carga vertical unitaria en el punto  $\xi$ ,  $C^{wf}(x,\xi)$  el desplazamiento vertical producido en  $x$  al aplicar un momento de flexión unitario en  $\xi$  y  $C^{wt}(x,\xi)$  el desplazamiento vertical que se produce en  $x$  cuando se aplica un momento de torsión unitario en  $\xi$ . El resto de funciones de influencia son similares, por ejemplo,  $C^{ft}(x,\xi)$  es el giro de flexión producido en el punto  $x$  cuando se aplica un momento de torsión unitario en el punto  $\xi$ .

El vector  $\vec{p}(x,t)$  contiene las cargas dinámicas, tanto las fuerzas exteriores como las fuerzas de inercia.

$$\vec{p}(x,t) = -m(x) \cdot \frac{\partial^2 \vec{\delta}(x,t)}{\partial t^2} + \vec{f}(x,t) \quad (3.23)$$

donde  $\vec{f}(x,t)$  es el vector de cargas exteriores compuesto por la carga vertical  $F(x,t)$ , el momento flector  $M(x,t)$  y el momento torsor  $T(x,t)$ . Siendo  $m(x)$  es la matriz de masas generalizada.

$$\vec{f}(x,t) = \begin{pmatrix} F(x,t) \\ M(x,t) \\ T(x,t) \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$m(x) = \begin{pmatrix} \rho A & 0 & 0 \\ 0 & \rho I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \rho J \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 3.20:

$$\int_0^L C(x, \xi) \cdot m(\xi) \cdot \frac{\partial^2 \bar{\delta}(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi + \bar{\delta}(x, t) = \bar{\delta}_{est}(x, t) \quad (3.26)$$

siendo  $\delta(x, t)$  el desplazamiento en condiciones estáticas.

$$\bar{\delta}_{est}(x, t) = \int_0^L C(x, \xi) \cdot \bar{f}(\xi, t) d\xi \quad (3.27)$$

La ecuación 3.26 se ha resuelto numéricamente discretizando la ecuación en  $n$  puntos de control. De esta forma queda un sistema de  $3n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden.

$$C^* \cdot R^* \cdot M^* \frac{\partial^2 \bar{\delta}^*(t)}{\partial t^2} + \bar{\delta}^*(t) = \bar{\delta}_{est}^*(t) \quad (3.28)$$

donde  $C^*(3n \times 3n)$  es la matriz de las funciones de influencia,  $R^*(3n \times 3n)$  es una matriz diagonal que depende del algoritmo de integración y  $M^*(3n \times 3n)$  la matriz de masas generalizadas. Los  $n$  primeros componentes del vector  $\bar{\delta}^*(t)(3n)$  contienen los desplazamientos verticales, los  $n$  siguientes el giro de flexión de la sección y los  $n$  últimos el giro de torsión.

La ecuación 3.28 se puede transformar en:

$$\frac{\partial^2 \bar{\delta}^*(t)}{\partial t^2} = (C^* \cdot R^* \cdot M^*)^{-1} \cdot (\bar{\delta}_{est}^*(t) - \bar{\delta}^*(t)) \quad (3.29)$$

El problema queda reducido a resolver este sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden para lo cual existen diversos métodos numéricos que dan una solución suficientemente aproximada. Se ha realizado un trabajo de comparación de una serie de métodos numéricos, como el método de Runge-Kutta, el método



de Adams-Bashforth-Moulton, el método de Milne-Simpson modificado y la regla de Stoermer, encontrando que este último proporciona los mejores resultados en cuanto a coste computacional por lo que se ha utilizado en los trabajos realizados en esta tesis doctoral. En el anejo B se presentan estos métodos numéricos de integración utilizados. Se ha empleado el método de Gauss como método numérico de integración para determinar los coeficientes de la matriz  $[R]$ .

El algoritmo de cálculo del método de las funciones de influencia es independiente de las condiciones de contorno. Cuando se cambian las condiciones de contorno se modifican únicamente los coeficientes de la matriz  $[C]$ . Empleando otros métodos más habituales en el análisis de vigas a flexión, como se ha visto en el caso del análisis modal, es necesario resolver las ecuaciones para cada una de las condiciones de contorno.

### **3.3.2. Planteamiento del estudio de validación del método de las funciones de influencia**

Se han realizado dos validaciones del método de las funciones de influencia, por un lado, se ha con el método de los elementos finitos calculando los desplazamientos en una viga constituida por un laminado  $[0/90]_{2s}$  con diferentes condiciones de contorno para comprobar la independencia del algoritmo de cálculo frente a las condiciones de contorno. Por otro lado, se ha comprobado su precisión mediante la comparación con resultados experimentales.

### 3.3.2.1. Comparación con el método de los elementos finitos

La geometría de la viga sobre la que se ha realizado este estudio viene determinada por el análisis anterior, un espesor de 1,6 mm, ancho de 3,2 mm y una distancia entre apoyos de 24 mm. La esbeltez de esta viga, como se ha demostrado en el análisis de las tensiones de cortadura, requiere que se tengan en cuenta las tensiones de cortadura aunque no existen diferencias entre los métodos utilizados para el cálculo del factor de cortante. Por lo tanto, la viga se ha modelizado con la teoría de cortadura de primer orden empleando el factor de cortante clásico  $K=5/6$ . Al no tener láminas con orientación diferente a  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , permite ignorar los efectos de acoplamiento entre esfuerzos de flexión y torsión.

En este caso la fuerza aplicada se ha modelizado como una carga impulsiva cuyo tiempo de aplicación coincide con el tiempo característico de oscilación de la viga y cuyo valor máximo,  $F_0$ , es la unidad, ecuación 3.30, esta función no es un polinomio ni una función senoidal elemental, por lo que resulta difícil de resolver mediante otras técnicas como el análisis modal.

$$F(t) = F_0 \text{Sen}^{3/2} \left( \pi \frac{t}{t_c} \right) \quad (3.30)$$

El tiempo característico ha sido calculado con el modelo numérico tridimensional de verificación para cada una de las condiciones de contorno, tabla 3.6.

	Primera frecuencia propia (KHz)	Tiempo característico ( $\mu$ s)
Empotrada-libre	2,99	334
Apoyada-apoyada	8,26	121
Empotrada-apoyada	12,32	81
Empotrada-empotrada	16,94	59

Tabla 3.6. Frecuencias propias y tiempos característicos de la viga para las diferentes condiciones de contorno.

### Casos analizados

Se han estudiado las cuatro condiciones de contorno, figura 3.1, aplicando una carga impulsiva cuyo valor máximo es la unidad. La carga no se ha aplicado en el mismo punto en todos los casos, figura 3.14, el caso A es una viga en voladizo con una carga en su extremo libre, el caso B es una viga biapoyada con una carga puntual en su sección central, el caso C una viga empotrada-apoyada con una carga a dos tercios de su longitud y el caso D una viga biempotrada con una carga también situada a dos tercios de su longitud.

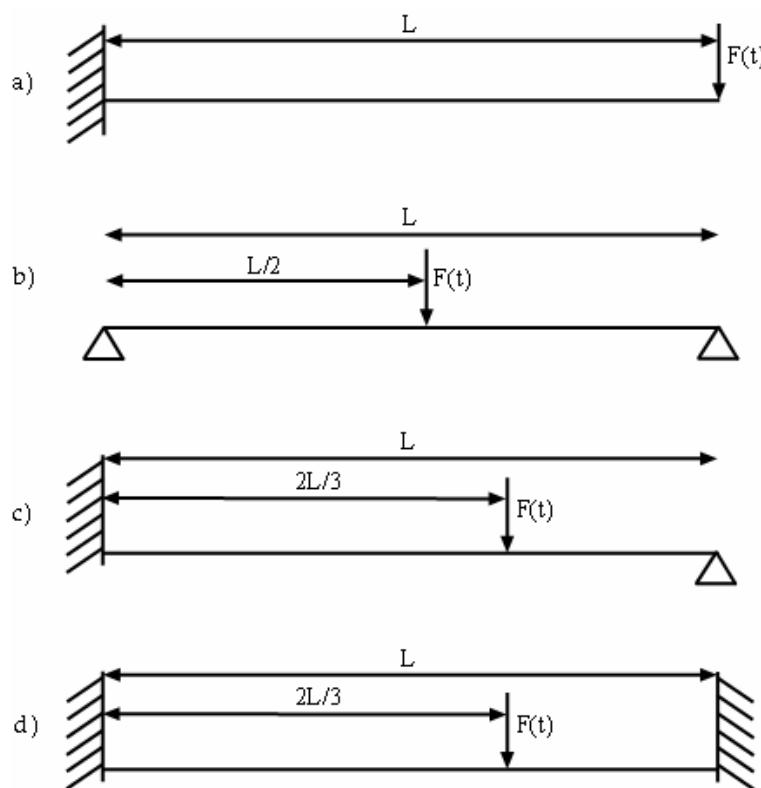


Figura 3.14. Casos analizados en la validación del método de las funciones de influencia modal: a) viga en voladizo, b) viga biapoyada, c) viga empotrada-apoyada, d) viga biempotrada.

El método de las funciones de influencia (MFI) se ha aplicado a estos cuatro casos calculando el desplazamiento vertical y el giro de flexión. Para comprobar la precisión del método, se han comparado los resultados con los obtenidos con los modelos numéricos unidimensional y tridimensional.

Los casos A y B son problemas isostáticos que se pueden resolver de forma sencilla aplicando otros métodos de resolución de ecuaciones como el análisis modal (MAM). En estos dos primeros casos, se han calculado los desplazamientos verticales y los giros de flexión con el análisis modal para poder comparar el método de las funciones de influencia con esta otra técnica. Por el contrario, los casos C y D son casos hiperestáticos y no simétricos, en estos casos el análisis modal resulta bastante difícil de aplicar, mientras que el método de las funciones de influencia se puede aplicar de la misma forma en todos los casos cambiando los coeficientes de la matriz de funciones de influencia.

### **3.3.2.2. Comparación con resultados experimentales**

El método de las funciones de influencia ha sido aplicado al cálculo del desplazamiento vertical máximo en un ensayo de flexión dinámica en torre de caída sobre una probeta de tejido de fibra de vidrio en matriz poliéster. El procedimiento experimental utilizado en los ensayos así como la geometría de la probeta se describen en el capítulo 5. El registro fuerza-tiempo obtenido durante un ensayo con una energía de impacto de 8 J sigue una evolución bastante aproximada a una función *seno* por lo que la carga aplicada se ha modelizado siguiendo esa función, figura 3.15.

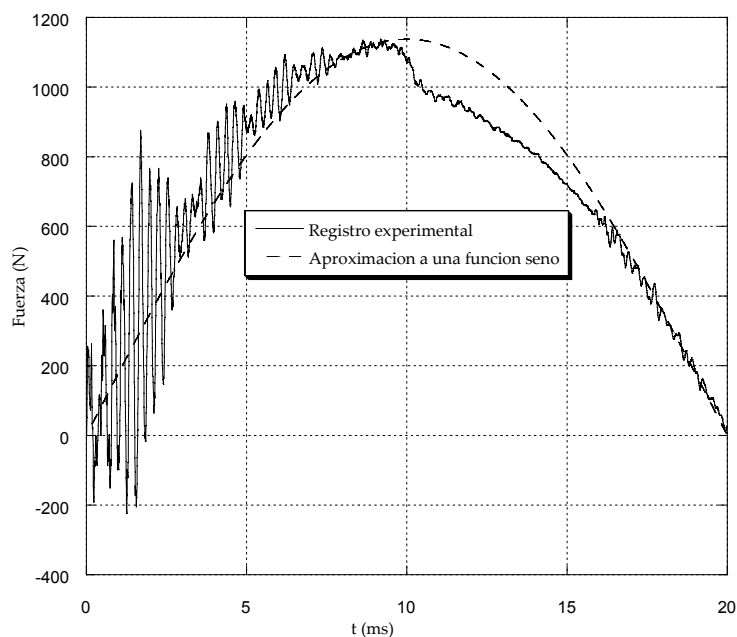


Figura 3.15. Carga impulsiva aplicada sobre la viga.

### 3.3.3. Resultados del estudio de validación del método de las funciones de influencia

En este apartado se presentan los resultados de las dos validaciones del método de las funciones de influencia, en primer lugar, la validación frente a cambios en las condiciones de contorno mediante la comparación de los resultados con los obtenidos mediante un programa de elementos finitos y, en segundo lugar, la validación de la precisión del método mediante la comparación con resultados experimentales.

#### 3.3.3.1. Comparación con el método de los elementos finitos

En las figuras 3.16, 3.17, 3.18 y 3.19 se muestran los resultados de los casos A, B, C y D respectivamente. Los resultados obtenidos son los desplazamientos y giros adimensionalizados en el extremo libre en el caso A y en la sección central de la viga en los casos B, C y D. En la viga simplemente apoyada, caso B, no se muestra el giro de la sección porque es nulo por condiciones de simetría.

Los desplazamientos y los giros han sido adimensionalizados con el valor obtenido en el modelo numérico tridimensional en condiciones estáticas bajo una carga unitaria. El tiempo ha sido adimensionalizado con el tiempo característico de la viga, tabla 3.6.

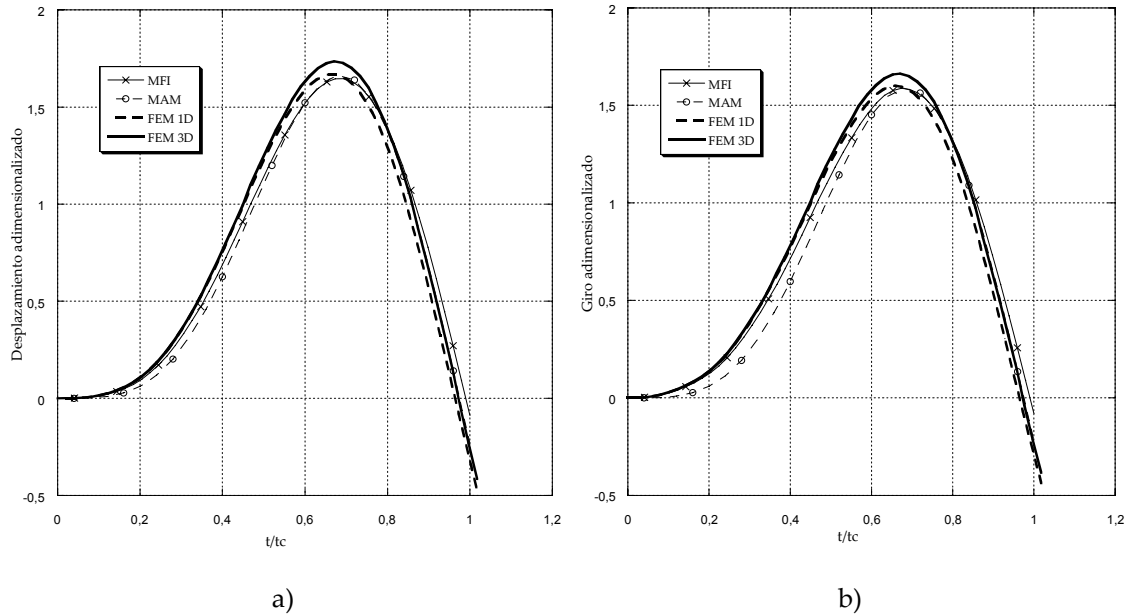


Figura 3.16. Caso A. Viga en voladizo: a) desplazamiento adimensionalizado en el extremo libre, b) giro de la sección adimensionalizados en el extremo libre.

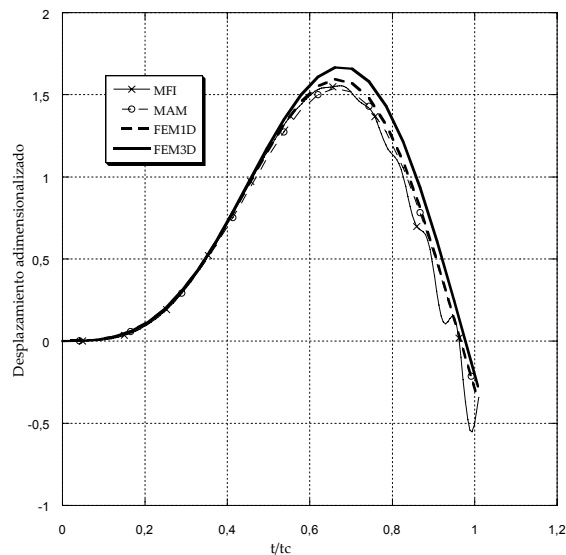


Figura 3.17. Caso B. Viga biapoyada. Desplazamiento adimensionalizado en la sección central de la viga.

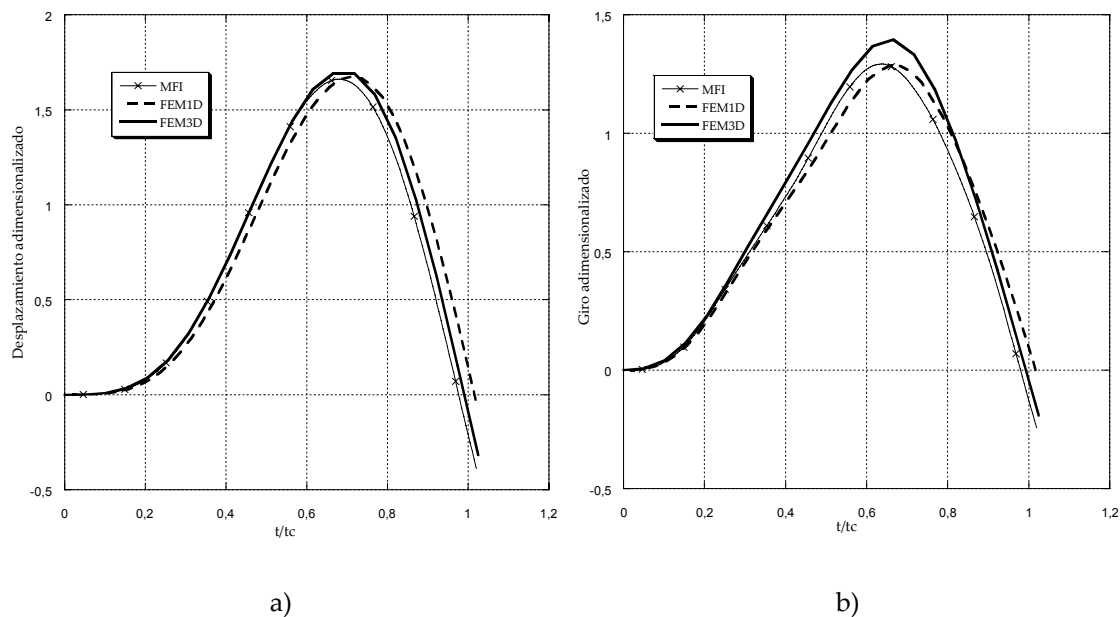


Figura 3.18. Caso C. Viga empotrada-apoyada: a) desplazamiento vertical adimensionalizado de la sección central, b) giro de la sección central adimensionalizado.

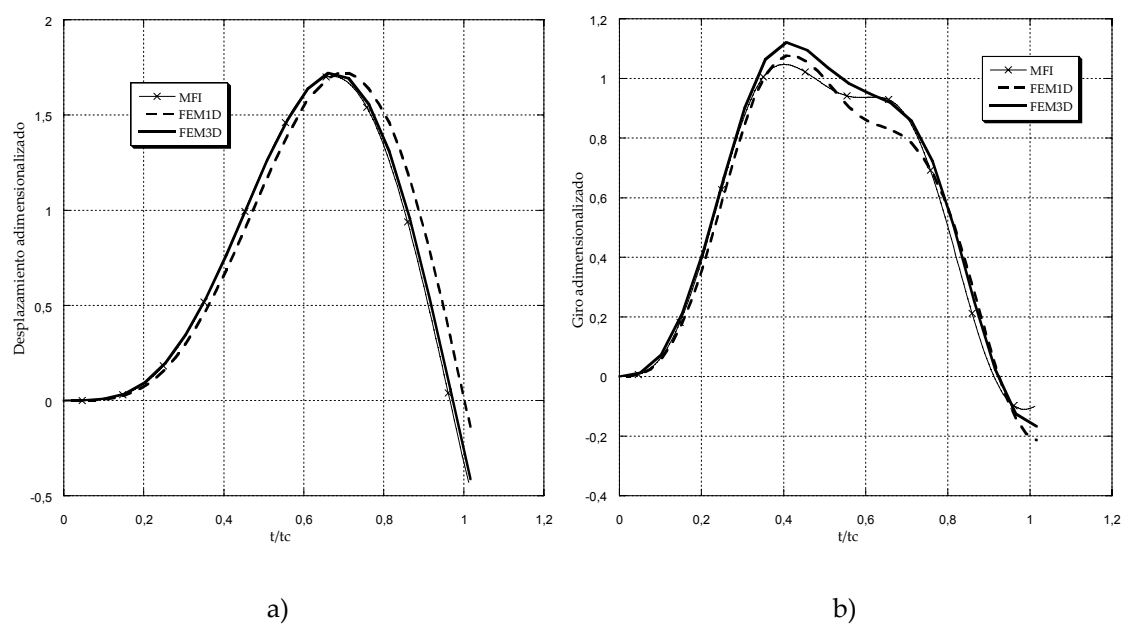


Figura 3.19. Caso D. Viga biempotrada: a) desplazamiento vertical adimensionalizado de la sección central, b) giro de la sección central adimensionalizado.

Los resultados obtenidos con el método de las funciones de influencia concuerdan bastante bien con los de los modelos de elementos finitos. La tabla 3.7 muestra las diferencias entre el método de las funciones de influencia y los otros métodos en los valores máximos del desplazamiento vertical y el giro de la sección.

	MAM		FEM 1D		FEM 3D	
	Desp.(%)	Giro(%)	Desp.(%)	Giro(%)	Desp.(%)	Giro(%)
Caso A Empotrada-Libre	1,09	0,01	1,35	0,90	5,42	4,79
Caso B Apoyada-Apoyada	0,95	-	2,54	-	7,15	-
Caso C Empotrada-Apoyada	-	-	0,74	0,62	1,91	7,40
Caso D Empotrada-Empotrada	-	-	0,96	1,97	0,96	6,62

Tabla 3.7. Diferencias en los valores máximos del desplazamiento y del giro de la sección.

Un resultado muy significativo es la pequeña diferencia existente entre el método de las funciones de influencia y el análisis modal en los casos A y B, un máximo de un 1%. Ambas técnicas presentan resultados muy parecidos a los modelos numéricos, especialmente al unidimensional. En los problemas isostáticos, el análisis modal es el método más habitual y el método de las funciones de influencia no presenta ventajas significativas, pero en problemas hiperestáticos y no simétricos, como los casos C y D, el análisis modal resulta bastante difícil de aplicar, es necesario resolver un algoritmo diferente cada vez que cambian las condiciones de contorno o el punto de aplicación de la carga. La ventaja del método de las funciones de influencia en estos casos es que hay que resolver el mismo algoritmo, si cambian las condiciones de contorno sólo hay que cambiar la matriz de las funciones de influencia,  $[C]$ .

Las diferencias en la comparación de los resultados del desplazamiento vertical son bastante pequeñas, menores al 8% en todos los casos y sólo superan el 3% en la comparación con el modelo numérico tridimensional en los casos A y B. Esto se debe a que en estos casos los resultados se han tomado en el punto de aplicación de la carga y en el modelo numérico tridimensional se produce una compresión local que explicaría este aumento en las diferencias.

Comparando el giro de flexión las diferencias también son menores al 8% en todos los casos, y sólo superan el 2% en la comparación con el modelo de elementos finitos tridimensional. Tanto los modelos analíticos como el modelo numérico



unidimensional calculan el desplazamiento y el giro de la sección en función de la coordenada longitudinal de la viga asumiendo las hipótesis de Kirchhoff, por lo que las diferencias entre estos modelos son mínimas. Sin embargo, el modelo de elementos finitos tridimensional no asume ninguna de las hipótesis de Kirchhoff: las rectas perpendiculares al plano antes de la deformación no tiene por qué seguir siendo rectas, ni permanecer perpendiculares y pueden cambiar su longitud. De hecho, en la sección de la viga existe un campo de deformaciones tridimensional y el giro de la sección se ha calculado como el giro medio de dicha sección. En esta situación las diferencias en el valor obtenido para el giro de la sección no pueden ser muy pequeñas, aunque las medidas estén tomadas en un punto suficientemente alejado del punto de aplicación de la carga como para que no existan efectos de compresión local. A pesar de que las diferencias en el cálculo del giro de la sección sean elevadas, no afectan al cálculo del desplazamiento, donde las diferencias son menores al 2% siempre que los resultados se tomen en puntos suficientemente alejados de la zona de aplicación de la carga.

### **3.3.3.2. Comparación con resultados experimentales**

En la siguiente figura se muestran los resultados obtenidos mediante el método de las funciones de influencia en el cálculo del desplazamiento vertical máximo durante un ensayo de flexión dinámica así como los resultados experimentales.

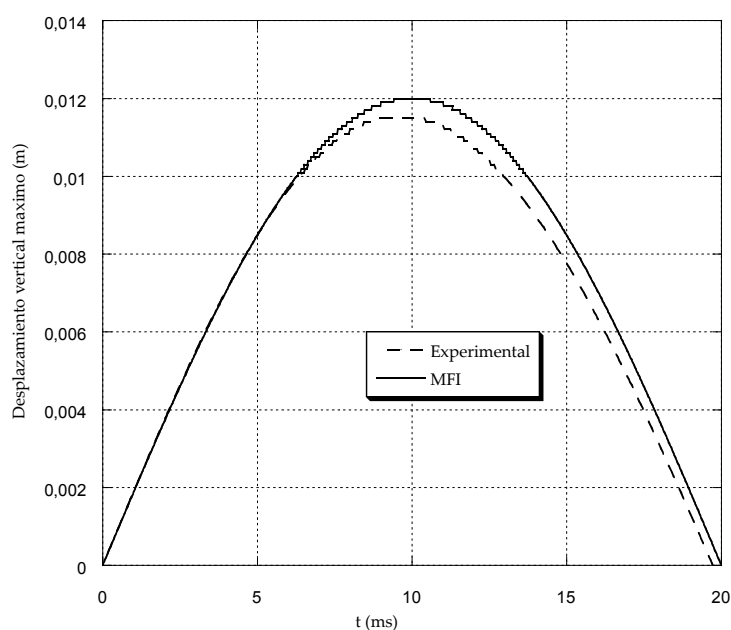


Figura 3.20. Validación experimental del método de las funciones de influencia.

Se puede comprobar que los resultados proporcionados por el método de las funciones de influencia se aproximan suficientemente a los observados experimentalmente. El valor máximo de las diferencias es de un 4,62%, un valor que no es significativo si se tiene en cuenta que la fuerza aplicada en el método de las funciones de influencia no es exactamente igual que la registrada experimentalmente, figura 3.15. Además, durante el ensayo se ha producido un daño en la probeta que puede mermar sus propiedades mecánicas pero que no ha sido considerado en el modelo simplificado.

En este apartado se ha comprobado que el método de las funciones de influencia es una herramienta perfectamente válida para el cálculo de los desplazamientos dinámicos en laminados, en los siguientes apartados se ha aplicado a problemas más complejos en los que se incluye el fenómeno de acoplamiento flexión-torsión.

### 3.4. Análisis del acoplamiento de esfuerzos flexión-torsión en laminados

En los materiales compuestos de tipo laminado se puede producir el fenómeno de acoplamiento flexión-torsión en función de la orientación de las láminas. En este apartado se ha analizado, en primer lugar, como influye la secuencia de apilamiento en el acoplamiento de esfuerzos. Posteriormente, se ha estudiado el comportamiento dinámico de un laminado con una secuencia de apilamiento en la que se produce el fenómeno de acoplamiento flexión-torsión.

#### 3.4.1. Fenómeno de acoplamiento flexión-torsión en laminados

En una viga de sección rectangular constituida por materiales isótropos no se produce el fenómeno de acoplamiento flexión-torsión y, en el caso de laminados, sólo aparece cuando alguna lámina tiene una orientación distinta a  $0^\circ$  o  $90^\circ$ . En estos casos aparecen giros o esfuerzos de torsión en el laminado aunque esté sometido exclusivamente a esfuerzos de flexión. Esto es debido a que para estos laminados en la matriz de rigidez a flexión del laminado  $[D]$ , ecuación 2.14, el término  $D_{16}$  es distinto de cero. En una viga sometida únicamente a cargas verticales constituida por estos laminados, pueden aparecer esfuerzos o giros de torsión. Por otro lado, en un problema en el que se aplique únicamente un momento de torsión también aparecerán giros o esfuerzos de flexión.

En este apartado se plantean las ecuaciones del movimiento considerando tres variables para el cálculo de los desplazamientos: el desplazamiento vertical,  $w_0$ , el giro de flexión,  $\phi_x$ , y el giro de torsión,  $\phi_y$ . Se ha empleado un modelo unidimensional, las variables sólo dependen de la coordenada longitudinal.

$$\begin{cases} w_0 = w_0(x, t) \\ \phi_x = \phi_x(x, t) \\ \phi_y = \phi_y(x, t) \end{cases} \quad (3.31)$$

El campo de desplazamientos simplificado, ecuación 2.19, incluye ahora el desplazamiento en dirección  $y$ ,  $v(x, z)$ :

$$\begin{cases} u(x, z) = z\phi_x(x) \\ v(x, z) = z\phi_y(x) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (3.32)$$

En el campo de deformaciones aparece la deformación de torsión:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ 2\varepsilon_{yz} = \phi_y \\ 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{cases} \quad (3.33)$$

Introduciendo estos valores en las ecuaciones constitutivas, ecuaciones 2.13, 2.14 y 2.15:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} &= d_{11} M_{xx} \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x &= \frac{a_{55}}{K} Q_x \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial x} &= d_{16} M_{xx} \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde  $d_{16}$  es el término correspondiente de la matriz de flexibilidad  $[d]$ .

Introduciendo estos valores en las ecuaciones de movimiento, ecuaciones 2.10 tercera, cuarta y quinta, y despreciando los esfuerzos axiales se llega a la expresión que se emplea de forma más habitual y que se incluye en el capítulo de antecedentes, ecuación 2.47.

$$\begin{aligned}
KG_{xz}^b bh \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + \hat{q} &= \hat{I}_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\
E_{xx}^b I_{yy} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + K_T \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - KG_{xz}^b bh \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) &= \hat{I}_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\
K_T \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + G_T J \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - KG_{xz}^b bh \phi_y &= J_0 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

donde:

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{12} bh \cdot (b^2 + h^2) \\
G_T &= \frac{12}{d_{66} h \cdot (b^2 + h^2)} \\
J_0 &= J \rho \\
K_T &= \frac{b}{d_{16}}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

### 3.4.2. Planteamiento del estudio del fenómeno de acoplamiento flexión-torsión

En el caso de una viga de material compuesto de tipo laminado de sección rectangular, el fenómeno de acoplamiento flexión-torsión queda determinado por el término  $d_{16}$  de la matriz de flexibilidad a flexión. Este término, como ya se ha comentado, es distinto de cero cuando alguna de las láminas tiene una orientación diferente de  $0^\circ$  o de  $90^\circ$ .

Para establecer una relación entre la secuencia de apilamiento del laminado y el fenómeno de acoplamiento se han seleccionado dos laminados: el laminado  $[0]_8$  y el laminado  $[0/90]_{2s}$ . Estos laminados se han ido girando desde  $0^\circ$  hasta  $180^\circ$  y se ha calculado el factor de acoplamiento flexión-torsión  $K_T$ , ecuación 3.36, en función del ángulo de giro, figura 3.21.

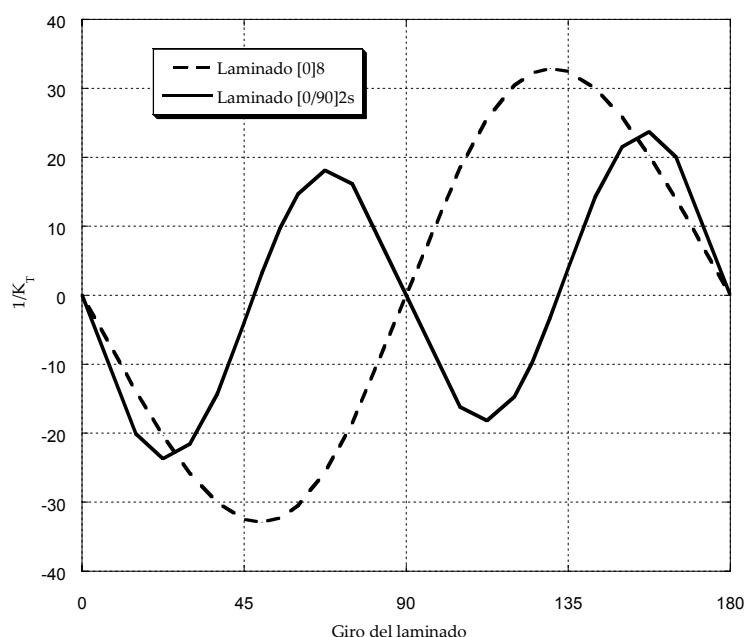


Figura 3.21. Inversa del factor de acoplamiento flexión-torsión en función del ángulo de giro del laminado.

Se observa que en el laminado  $[0]_8$  el fenómeno de acoplamiento es mayor que en el  $[0/90]_{2s}$ , esto se debe a que en el segundo se compensa el acoplamiento de unas láminas en un sentido con el de sentido contrario de las láminas perpendiculares. El mayor acoplamiento es el producido en el laminado  $[0]_8$  cuando éste ha girado  $49,48^\circ$ , es decir, un laminado unidireccional con todas las láminas orientadas a  $49,48^\circ$ .

A la vista de estos resultados, se ha realizado un estudio dinámico con una viga de la misma geometría que en el estudio anterior ( $1,6 \times 3,2 \times 24 \text{ mm}^3$ ) constituida por un laminado  $[50]_8$ , no se ha empleado el giro exacto de  $49,48^\circ$  porque la diferencia es muy pequeña y en la práctica no tiene sentido fabricar un laminado con una orientación tan precisa. Se han seleccionado dos casos diferentes, una viga en voladizo con una carga en el extremo libre y una viga biapoyada con una carga vertical en el punto medio.

El primer caso, viga en voladizo, ha sido escogido porque representa estructuras en las que se produce el fenómeno de acoplamiento flexión-torsión de forma

habitual, por ejemplo la pala de una hélice o de un aerogenerador. En este caso, en el extremo empotrado se han impuesto restricciones a los desplazamientos y giros mientras que el otro extremo queda libre.

El segundo caso, viga biapoyada, se ha escogido porque representa la configuración del ensayo de flexión en tres puntos y de muchas estructuras tipo viga constituidas por materiales compuestos. Se han tratado de reproducir las condiciones de contorno del ensayo, figura 3.22, la probeta se encuentra apoyada sobre una línea a lo largo de su ancho en cada uno de los apoyos, el giro de flexión se produce sin oposición mientras que existe una restricción al giro libre de torsión, aunque no sea completa. Al modelizar las condiciones de contorno en estos puntos, se ha restringido el giro de torsión y se ha dejado libre el giro de flexión.

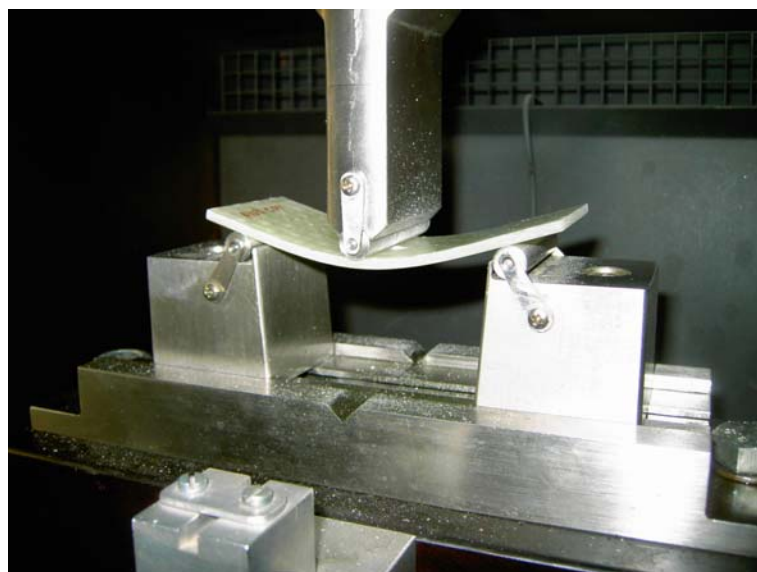


Figura 3.22. Ensayo de flexión en tres puntos.

Para verificar que las condiciones de contorno son similares a las reales se han realizado dos simulaciones numéricas tridimensionales, en la primera simulación, se han modelizado las condiciones de contorno reales incluyendo los contactos con el percutor y los apoyos, en la segunda simulación, se ha simplificado el problema con las condiciones de contorno empleadas en el modelo analítico y se ha aplicado la fuerza a lo largo de la sección media de la probeta. En la siguiente

figura se muestra el giro de torsión producido en ambos modelos a lo largo de la coordenada longitudinal desde uno de los apoyos hasta la sección centra.

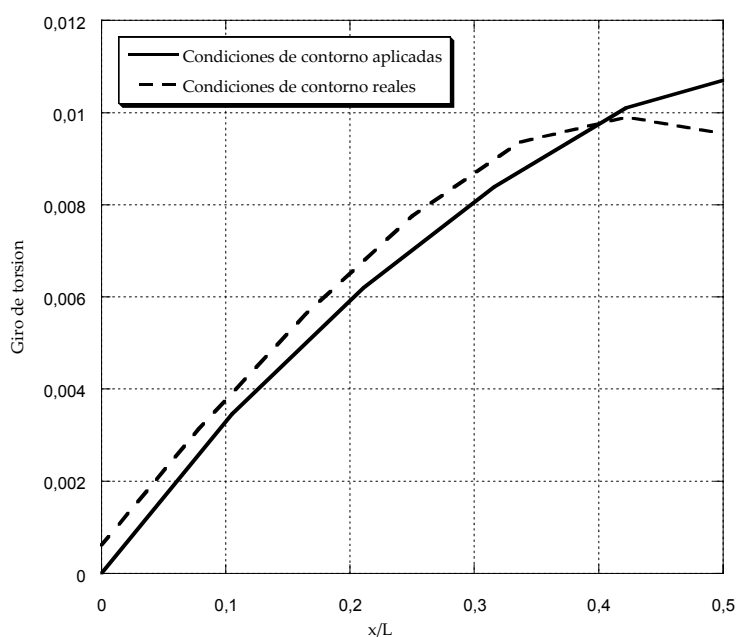


Figura 3.23. Giro de torsión a lo largo del eje longitudinal de la viga en el ensayo de flexión en tres puntos.

Se observa que ambos resultados son bastante similares aunque se aprecian dos diferencias significativas. La primera de ellas aparece en el punto de contacto con los apoyos,  $x/L=0$ , en condiciones reales se produce un pequeño giro de torsión que está restringido en condiciones ideales, es decir, en el ensayo de flexión en tres puntos no existe restricción total al giro de torsión en los apoyos. La segunda diferencia está en el punto de contacto con el percutor,  $x/L=0,5$ , en condiciones reales se produce un cambio de pendiente brusco en la zona de contacto del percutor, debido a que dicho contacto impide en cierta medida el giro de torsión. A pesar de estas pequeñas diferencias, se considera que las condiciones de contorno aplicadas, en líneas generales, simulan bien las del ensayo de flexión en tres puntos.

La carga aplicada ha sido una carga impulsiva, ecuación 3.30, cuyo tiempo de aplicación coincide con el tiempo característico de la viga, calculado como la



inversa de la primera frecuencia propia obtenida con el modelo de elementos finitos tridimensional, tabla 3.8.

	Frecuencia propia (KHz)	Tiempo característico ( $\mu$ s)
Viga en voladizo	1,32	756
Viga biapoyada	3,85	259

Tabla 3.8. Primera frecuencia propia y tiempo característico en el laminado [50]s.

Los resultados obtenidos con el método de las funciones de influencia han sido comparados con los obtenidos en el modelo de elementos finitos tridimensional.

### 3.4.3. Resultados del estudio del fenómeno de acoplamiento flexión-torsión

En los dos casos estudiados, viga en voladizo y viga biapoyada, se ha calculado el desplazamiento dinámico y los giros de flexión y torsión. En ambos casos se han calculado estos valores lejos del punto de aplicación de la carga para evitar distorsión en los resultados en el modelo numérico tridimensional debido a compresión local, en la viga en voladizo se ha tomado como referencia la sección central y en la biapoyada la sección situada a un cuarto de la longitud de la viga.

En las figuras 3.24 y 3.25 se muestran los resultados de la viga en voladizo y de la biapoyada respectivamente. Los resultados mostrados son el desplazamiento, el giro de flexión y el giro de torsión dinámicos adimensionalizados con el valor correspondiente obtenido en un análisis estático con el modelo de elementos finitos tridimensional.

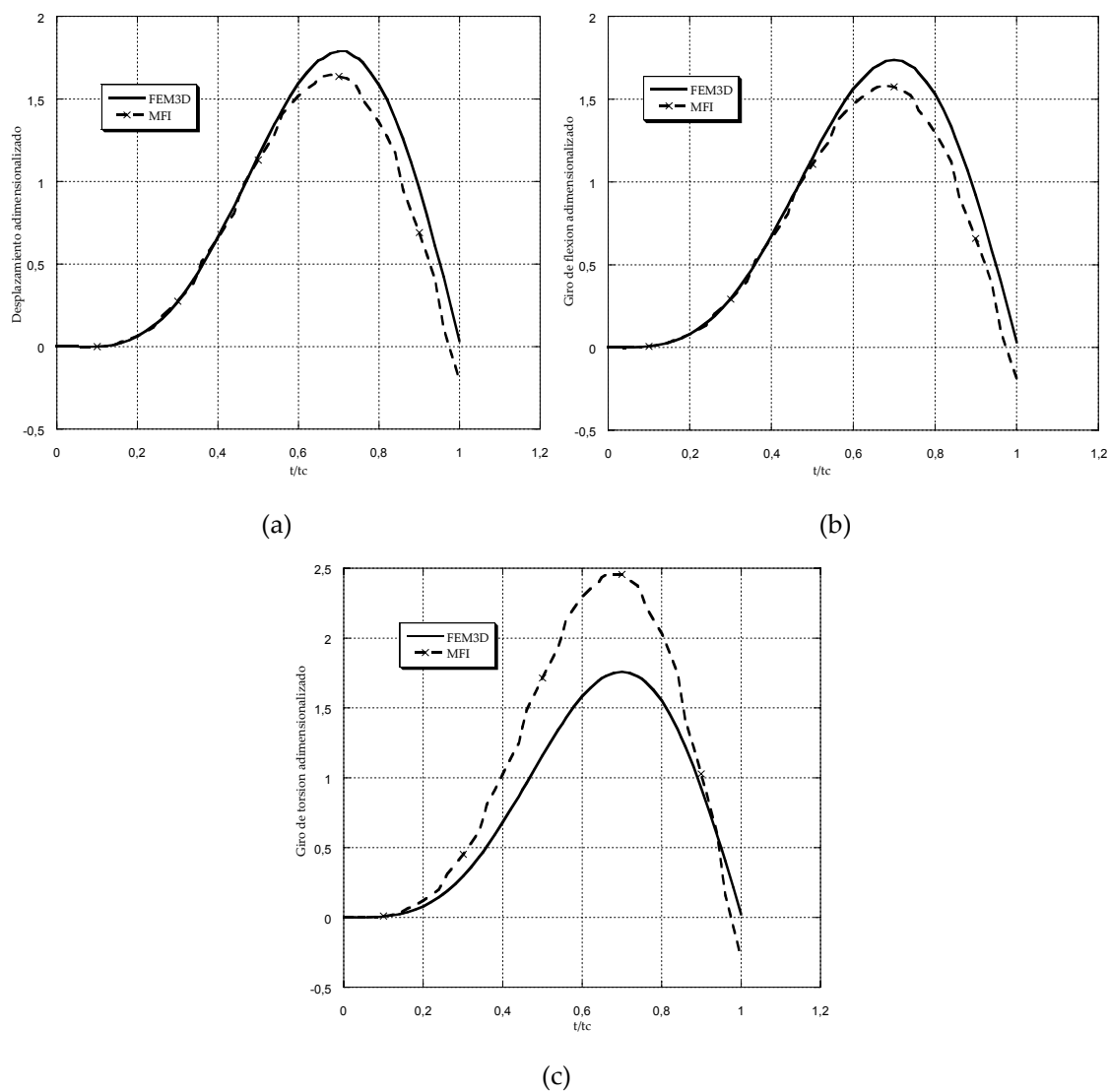


Figura 3.24. Viga en voladizo: a) desplazamiento vertical adimensionalizado de la sección central, b) giro de flexión de la sección central adimensionalizado, c) giro de torsión de la sección central adimensionalizado.

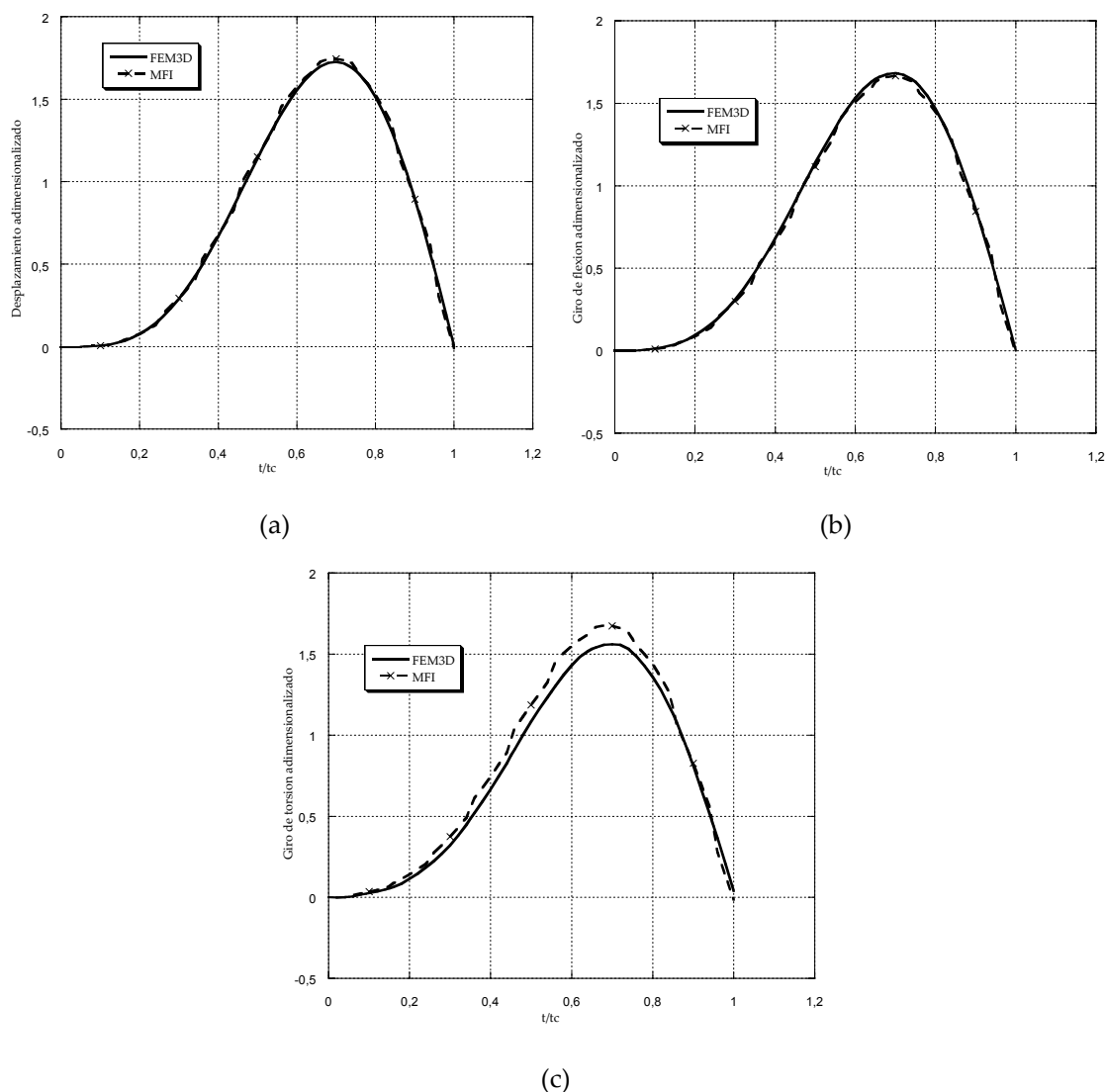


Figura 3.25. Viga biapoyada: a) desplazamiento vertical adimensionalizado de la sección situada a un cuarto de su longitud, b) giro de flexión adimensionalizado de la sección situada a un cuarto de su longitud, c) giro de torsión adimensionalizado de la sección situada a un cuarto de su longitud.

En líneas generales los resultados obtenidos con el método de las funciones de influencia se aproximan bastante bien a los numéricos, aunque al introducir el fenómeno de acoplamiento flexión-torsión aumentan las diferencias entre ambos métodos.

En la tabla siguiente se muestran las diferencias entre los valores máximos del desplazamiento y de los giros de flexión y torsión obtenidos con el método de las funciones de influencia, respecto de los obtenidos mediante el modelo de elementos finitos tridimensional.

	Desplazamiento (%)	Giro de flexión (%)	Giro de torsión (%)
Empotrada-Libre	8,7	9,9	28,5
Apoyada-Apoyada	1,0	1,1	7,0

Tabla 3.9. Diferencias entre el método de las funciones de influencia y el modelo de elementos

finitos, en los valores máximos de desplazamiento, giros de flexión y giro de torsión.

En el caso de una viga en voladizo, los resultados obtenidos mediante las funciones de influencia no reproducen tan fielmente como en la viga biapoyada los resultados del modelo numérico tridimensional, las diferencias son especialmente elevadas en el caso del giro de torsión, en la figura 3.26 se muestran los valores numéricos del giro de torsión sin adimensionalizar.

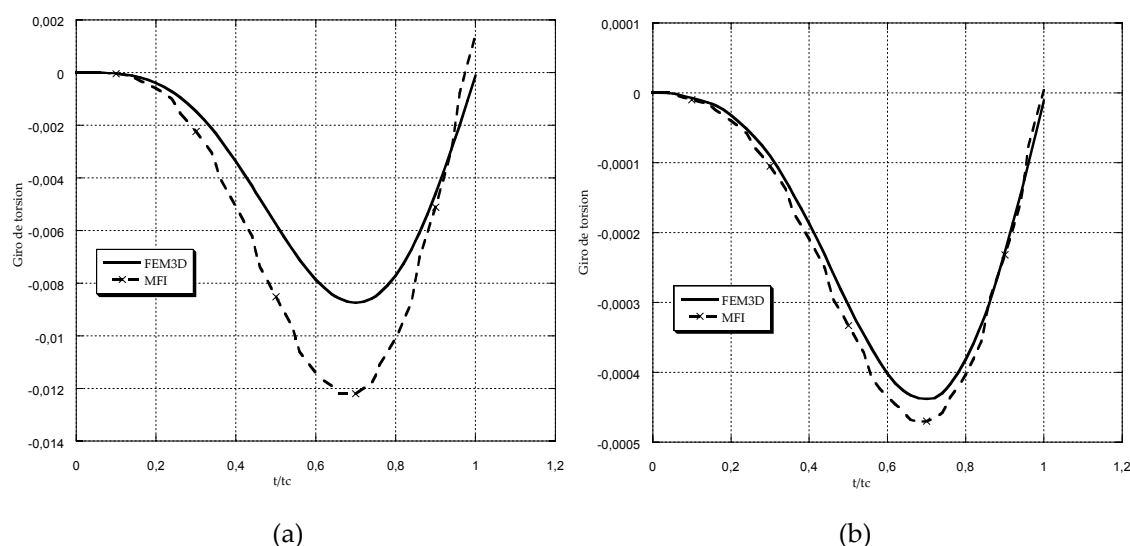


Figura 3.26. Giro de torsión: a) viga en voladizo, resultados en sección central, b) viga biapoyada, resultados en sección a un cuarto de la longitud.

Observando estos resultados se comprueba que el giro de torsión es de un orden de magnitud superior en la viga en voladizo que en la viga biapoyada, debido a que en la viga biapoyada el giro de torsión está impedido en los extremos.

Las diferencias encontradas demuestran que el problema de la torsión de una viga de sección rectangular es un problema complejo. No es posible reducirlo a un problema dependiente únicamente de la coordenada longitudinal de la viga como se ha hecho en este estudio, cuanto mayor sea el giro de torsión mayores serán los

errores cometidos por esta aproximación. El modelo numérico tridimensional reproduce la complejidad del problema de torsión, sin embargo, el método de las funciones de influencia se ha aplicado a un modelo unidimensional simplificado.

Como se ha visto en los apartados anteriores, el problema del giro de flexión se puede reproducir bastante fielmente con un modelo unidimensional, asumiendo las hipótesis de la teoría de cortadura de primer orden los resultados son bastante satisfactorios. El giro de torsión, en cambio, no se puede simplificar como un giro homogéneo de una sección, habría que emplear algún modelo más complejo que considere el problema de torsión de una sección rectangular.

Otra posible causa de la discrepancia entre los resultados de las funciones de influencia respecto de los resultados numéricos es el modo de aplicar la carga. En el modelo analítico la carga se aplica en un punto, ya que para una determinada coordenada longitudinal el modelo unidimensional sólo consta de un punto. En el modelo de elementos finitos tridimensional una carga puntual supondría una concentración de esfuerzos que distorsionaría los resultados, por ello la carga ha sido aplicada en una pequeña superficie, ésta se ha centrado en la coordenada longitudinal sobre la que está la carga en el modelo unidimensional. Esta diferencia a la hora de aplicar la fuerza puede provocar discrepancias en los resultados.

A pesar de estos problemas de modelización, los resultados obtenidos en la viga biapoyada son bastante buenos, siendo el error cometido menor al 10% en todos los casos. En el caso de la viga en voladizo los errores en el cálculo del desplazamiento y el giro de flexión también son menores al 10%.

Se han calculado en diferentes puntos los desplazamientos, giros de flexión y giros de torsión con el método de las funciones de influencia. Con estos valores se ha realizado una representación tridimensional de la viga en el momento de máxima deformación para las dos condiciones de contorno estudiadas y se ha comparado

con la imagen obtenida mediante el modelo de elementos finitos tridimensional, figuras 3.27 y 3.28.

En estas imágenes se aprecia como las funciones de influencia son capaces de reproducir el comportamiento tan complejo de estos laminados con bastante fiabilidad. A pesar de los problemas de modelización mencionados, provocados en su mayor parte por el hecho de simplificar un problema tridimensional y convertirlo en un problema de una única dimensión, este método consigue calcular los desplazamientos y los giros de flexión y torsión de una viga de tipo laminado con un coste computacional mucho menor que el de un modelo de elementos finitos tridimensional y una precisión razonable.

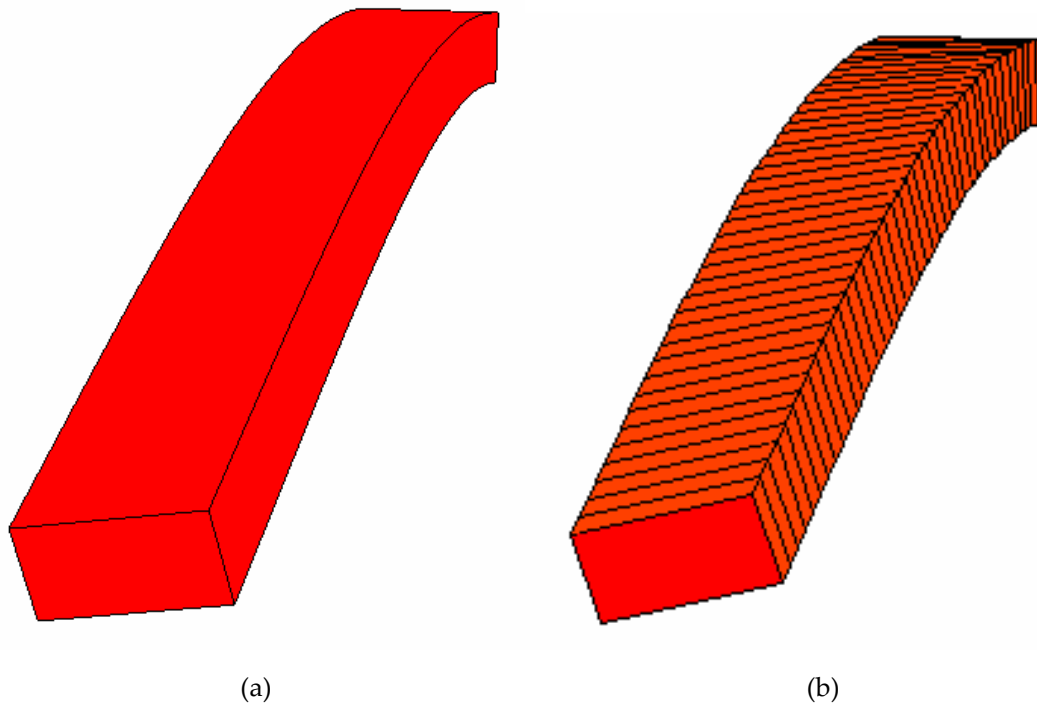
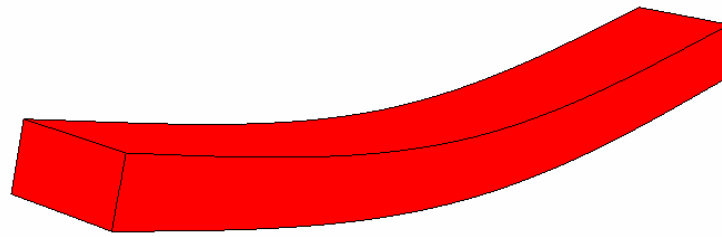
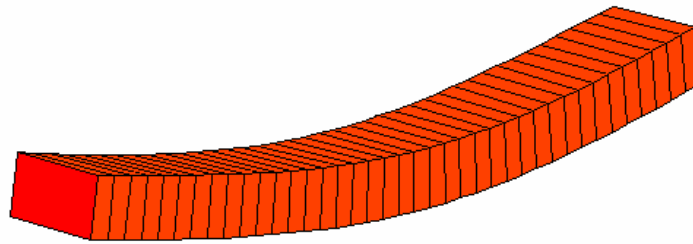


Figura 3.27. Viga en voladizo con una carga en el extremo libre en el momento de máxima deformación: a) FEM3D, b) representación tridimensional obtenida a partir de las funciones de influencia.



(a)



(b)

Figura 3.28. Viga biapoyada con una carga en la sección central en el momento de máxima deformación: a) FEM3D, b) representación tridimensional obtenida a partir de las funciones de influencia.





## **CAPÍTULO 4**

# **MODELO DE COMPORTAMIENTO MECÁNICO APLICADO A LA SIMULACIÓN DE ENSAYOS DE FLEXIÓN DINÁMICA**

### **4.1. Introducción**

La disponibilidad de un modelo de comportamiento mecánico de material que, implementado en un código de elementos finitos, permita simular adecuadamente los diferentes modos de fallo que aparecen en los materiales compuestos de tipo laminado, resulta de gran interés para el diseño de componentes estructurales. En este capítulo, se ha profundizado en el desarrollo de un modelo de comportamiento mecánico para laminados, que sea capaz de predecir los distintos modos de rotura y el daño producido durante un impacto.

El modelo de comportamiento mecánico ha sido aplicado a un tipo de problema concreto: elementos estructurales tipo viga sometidos a cargas impulsivas que

generen esfuerzos de flexión. Para ello se ha realizado una simulación numérica del ensayo de flexión dinámica en torre de caída de peso con dos objetivos, en primer lugar, validar el modelo de comportamiento mecánico comparando los resultados del modelo con otros obtenidos experimentalmente y, en segundo lugar, utilizar esta herramienta numérica para analizar la influencia de la energía de impacto en los resultados del ensayo de flexión dinámica en función de la distancia entre apoyos.

Para realizar las simulaciones numéricas se ha empleado el código comercial de elementos finitos ABAQUS Explicit (HKS, 2003). El modelo de comportamiento mecánico del material ha sido definido por medio de una subrutina de usuario escrita en el lenguaje de programación FORTRAN, gracias a la cual, se han implementado los diferentes mecanismos de daño.

## **4.2. Modelo de comportamiento mecánico**

El modelo de comportamiento mecánico necesario para modelizar un material compuesto de tipo laminado debe considerar la anisotropía y heterogeneidad de estos materiales, así como los diferentes modos de fallo que pueden aparecer. Dada la complejidad del problema del impacto sobre laminados, el modelo implementado en la simulación numérica debe cumplir una serie de condiciones:

- Se debe definir un criterio de rotura por cada modo de fallo que puede aparecer en el material.
- El estado tensional en cada punto de integración se ve afectado de forma diferente por la verificación de cada uno de los criterios. En caso de que se cumpla alguno de los criterios, se deberán corregir los valores de las componentes del tensor de tensiones afectadas.

- La pérdida de rigidez en los elementos dañados implica grandes deformaciones que pueden ocasionar problemas numéricos. Por lo que es necesario definir un criterio de eliminación de elementos antes de que se produzcan inconsistencias en la simulación.

### Criterios de daño

Se ha empleado el criterio de Hou et al. (2000), que se basa a su vez en el de Chang-Chang (1987), porque es uno de los criterios cuadráticos que contemplan varios modos de fallo y que, sin embargo, no requiere necesario conocer el valor de un gran número de parámetros para su aplicación. Este modelo ya ha sido aplicado a la simulación de impactos balísticos sobre laminados (López-Puente, 2003). Hou et al. consideran cuatro modos de daño con un criterio de rotura asociado a cada uno de ellos. Cuando el valor de un criterio de rotura alcanza la unidad se verifica el modo de fallo asociado y se anulan ciertas componentes del tensor de tensiones. Durante la simulación, cada uno de los cuatro criterios debe ser evaluado en cada punto de integración y en cada instante de tiempo para determinar si se deben corregir los valores de las tensiones. Los modos de fallo considerados son los siguientes:

- **Delaminación:** Existe una pérdida de continuidad entre dos láminas contiguas. En el criterio asociado intervienen las tensiones de cortadura fuera del plano ( $\sigma_{13}$  y  $\sigma_{23}$ ) y la tensión perpendicular al plano de la lámina ( $\sigma_{33}$ ) así como los valores de resistencia en las correspondientes direcciones. En este criterio sólo se considera la tensión perpendicular al plano cuando es de tracción. Cuando este modo de fallo se cumple se anulan las tensiones que intervienen en la ecuación.

$$d_d = \left( \frac{\sigma_{33}}{Z_r} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{23}}{S_{23}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{13}}{S_{13}} \right)^2 \quad \text{con } \sigma_{33} \geq 0 \quad (4.1)$$

- **Rotura de fibras:** Este modo de fallo considera la rotura de fibras tanto a tracción como a compresión, cuando uno de estos dos modos de fallo alcanza el valor unidad el material pierde su rigidez en todas las direcciones. Intervienen la tensión en dirección de las fibras ( $\sigma_{11}$ ) y las tensiones de cortadura en esa misma dirección ( $\sigma_{12}$  y  $\sigma_{13}$ ).

$$d_f = \left( \frac{\sigma_{11}}{X_t} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{S_f^2} \right)^2 \quad (4.2)$$

- **Rotura de la matriz a tracción:** La rotura de la matriz puede ocurrir por dos modos de fallo diferentes, este primero corresponde a un fallo a tracción y se aplica sólo si la tensión en dirección perpendicular a las fibras es positiva. Las componentes que intervienen son la tensión perpendicular a las fibras ( $\sigma_{22}$ ), el cortante en el plano ( $\sigma_{12}$ ) y el cortante en dirección perpendicular a las fibras ( $\sigma_{23}$ ), así como los valores de resistencia en las correspondientes direcciones. En caso de que se verifique este criterio se anula la tensión en dirección perpendicular a las fibras y la tensión de cortadura en el plano.

$$d_{mt}^2 = \left( \frac{\sigma_{22}}{Y_t} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{12}}{S_{12}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{23}}{S_{23}} \right)^2 \quad \text{con } \sigma_{22} \geq 0 \quad (4.3)$$

- **Rotura de la matriz a compresión:** Este segundo criterio de rotura de la matriz es conocido también como aplastamiento de la matriz. En la ecuación aparece el componente de la tensión en dirección perpendicular a las fibras ( $\sigma_{22}$ ) y la tensión de cortadura en el plano ( $\sigma_{12}$ ), así como los valores de la resistencia en las correspondientes direcciones. En caso de

verificación se anula únicamente la tensión en dirección perpendicular a las fibras.

$$d_{mc}^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{-\sigma_{22}}{S_{12}} \right)^2 + \frac{Y_c^2 \sigma_{22}}{4S_{12}^2 Y_c} - \frac{\sigma_{22}}{Y_c} + \left( \frac{\sigma_{12}}{S_{12}} \right)^2 \quad \text{con } \sigma_{22} < 0 \quad (4.4)$$

### Criterio de eliminación de elementos

Cuando uno de los criterios de fallo se cumple, el daño en el material se simula mediante la anulación de ciertas componentes del tensor de tensiones. Un descenso repentino de la rigidez provocaría problemas de inestabilidad y falta de convergencia, para evitarlos se ha realizado una transición suavizada disminuyendo el valor de la tensión hasta su anulación.

Mediante la subrutina de usuario, se obtiene del código de elementos finitos el incremento de deformación y los valores de las tensiones en el instante anterior, con estos datos se calculan las tensiones actualizadas, que a su vez se devuelven al código de elementos finitos. Cuando se verifica un criterio de fallo, la subrutina debe corregir el valor de las tensiones correspondientes mediante la siguiente expresión que suaviza la caída en el valor de las tensiones:

$$\sigma_{ij}^{cor} = \sigma_{ij} \left( 1 - \frac{2 - e^{S(d_k - 1/2)}}{2 - e^{S/2}} \right) \quad (4.5)$$

donde  $\sigma_{ij}$  y  $\sigma_{ij}^{cor}$  son las tensiones actualizadas antes y después de corregir respectivamente,  $d_k$  el valor del parámetro de fallo correspondiente a las tensiones afectadas, y  $S$  es un parámetro que afecta a la suavidad de la transición. Cuando un componente de la tensión se ve afectado por varios modos de fallo se escoge siempre el que tiene un mayor valor en el parámetro  $d_k$ . En la figura 4.1 se muestra la función para diferentes valores de  $S$ .

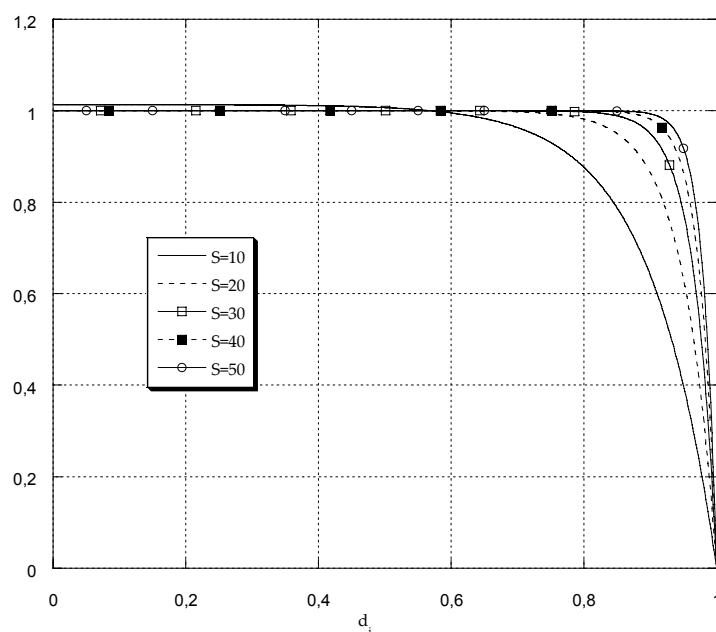


Figura 4.1. Función empleada para corregir los valores de la tensión afectados por algún modo de fallo.

Cuanto mayor es el valor del parámetro  $S$ , más se aproxima al comportamiento frágil del laminado pero también es más brusca la transición y pueden aparecer problemas numéricos. Para las simulaciones se ha tomado  $S=30$  por ser el mayor valor que no presenta problemas de tipo numérico.

Cuando un elemento ha perdido su rigidez tiende a deformarse incontroladamente y puede provocar problemas numéricos, por lo que se ha establecido un criterio para eliminar estos elementos. Se trata de un criterio de deformación máxima, puesto que las tensiones ya han sido anuladas en el elemento. El valor de las componentes de la deformación total debe calcularse por medio de la subrutina, ya que el programa no las proporciona. En cada instante de tiempo se comparan las deformaciones totales de cada elemento con sus valores respectivos de rotura, en caso de superarlas se elimina el elemento y deja de aportar rigidez e inercia al laminado.

### Diagrama de flujo del modelo de comportamiento mecánico

En este apartado se ha resumido de manera gráfica como se lleva a cabo el cálculo de las tensiones en un instante de tiempo en función de su valor en el instante de tiempo anterior, figura 4.2.

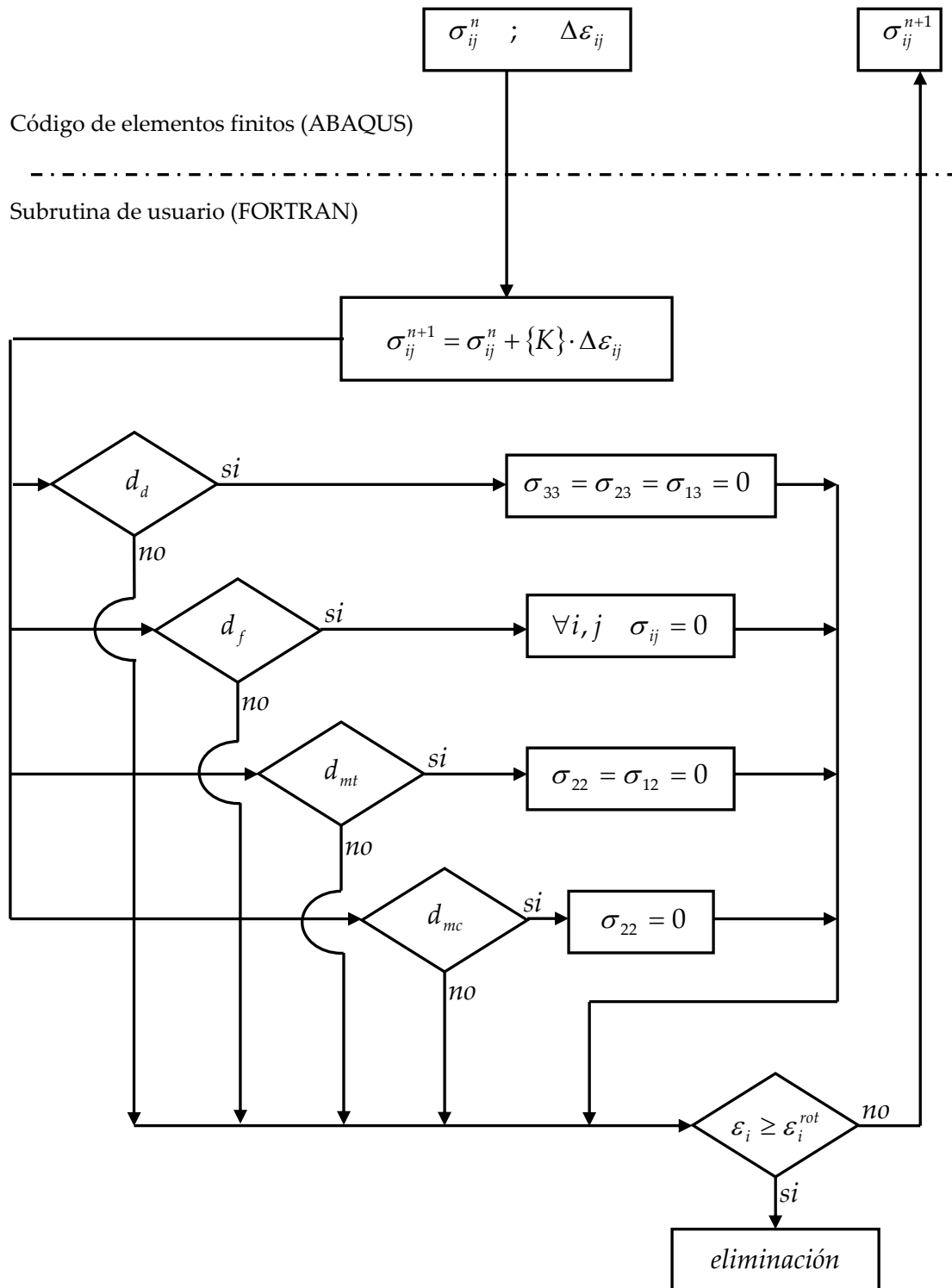


Figura 4.2. Diagrama de flujo del modelo de comportamiento mecánico.

### 4.3. Aplicación del modelo de comportamiento

El modelo de comportamiento mecánico para materiales compuestos de tipo laminado ha sido aplicado a la simulación de ensayos de flexión dinámica en torre de caída mediante el método de los elementos finitos. Los resultados del ensayo han sido utilizados para la validación del modelo de comportamiento mecánico. Este tipo de ensayos sobre materiales de tipo laminado es muy habitual porque el comportamiento de las probetas durante el ensayo es muy representativo del comportamiento de elementos estructurales tipo viga sometidos a cargas impulsivas. La respuesta estructural de estos elementos depende en gran medida de la energía con la que se produce el impacto, si es demasiado pequeña no se producirá la rotura de la probeta, pero si es demasiado grande puede producirse una separación entre el percutor y la probeta invalidando los resultados, además, al aumentar la energía de impacto el ruido en el registro fuerza-tiempo puede tener tal amplitud que enmascare la propia señal. Disponer de un modelo numérico para simular estos ensayos puede resultar una herramienta muy útil para analizar la influencia de la energía de impacto en los resultados del ensayo.

#### 4.3.1. Material empleado

El material empleado en este estudio está constituido por refuerzos de fibra de carbono en matriz epoxi AS4/3501-6. Este material es muy utilizado en la industria aeroespacial por sus elevados valores de rigidez y resistencia específicas. La fibra de carbono es una fibra continua AS4 de alta resistencia mecánica (4150 MPa) y elevada deformación de rotura (1,82 %). La resina epoxi 3501-6 también posee una elevada resistencia (45,50 MPa) y rigidez (4,24 GPa).

El laminado está formado por 10 láminas unidireccionales,  $[0]_{10}$ , y tiene 2 mm de espesor. Se ha escogido esta configuración por ser la que presenta mayor rigidez y



resistencia frente a esfuerzos de flexión, además, en este laminado no aparecen efectos de acoplamiento entre esfuerzos que puedan enmascarar los modos de fallo.

Para diseñar el tamaño de las probetas, se han utilizado los resultados del estudio de la influencia de las tensiones de cortadura interlaminar, apartado 3.2. El material empleado es un laminado altamente anisótropo, con una elevada relación entre la rigidez aparente a flexión y a cortadura interlaminar,  $E_{xx}^b/G_{xz}=20$ . Para este laminado, la influencia de las tensiones de cortadura interlaminar en el cálculo de los desplazamientos, se puede despreciar siempre y cuando la esbeltez de la probeta ( $L/h$ ) sea superior a 21, figura 3.6. Se han seleccionado dos relaciones  $L/h$ , 25 y 40, a fin de realizar los ensayos de flexión dinámica sin considerar la influencia de las tensiones de cortadura interlaminar. Estos valores de esbeltez, se refieren a la relación entre la distancia entre apoyos y el espesor del laminado, la longitud de las probetas debe ser ligeramente superior a la distancia entre apoyos. Con estos criterios, se han empleado dos tipos de probetas con geometría diferente:

- Probetas de 105x20x2 mm<sup>3</sup>.
- Probetas de 80x20x2 mm<sup>3</sup>.

### 4.3.2. Procedimiento experimental

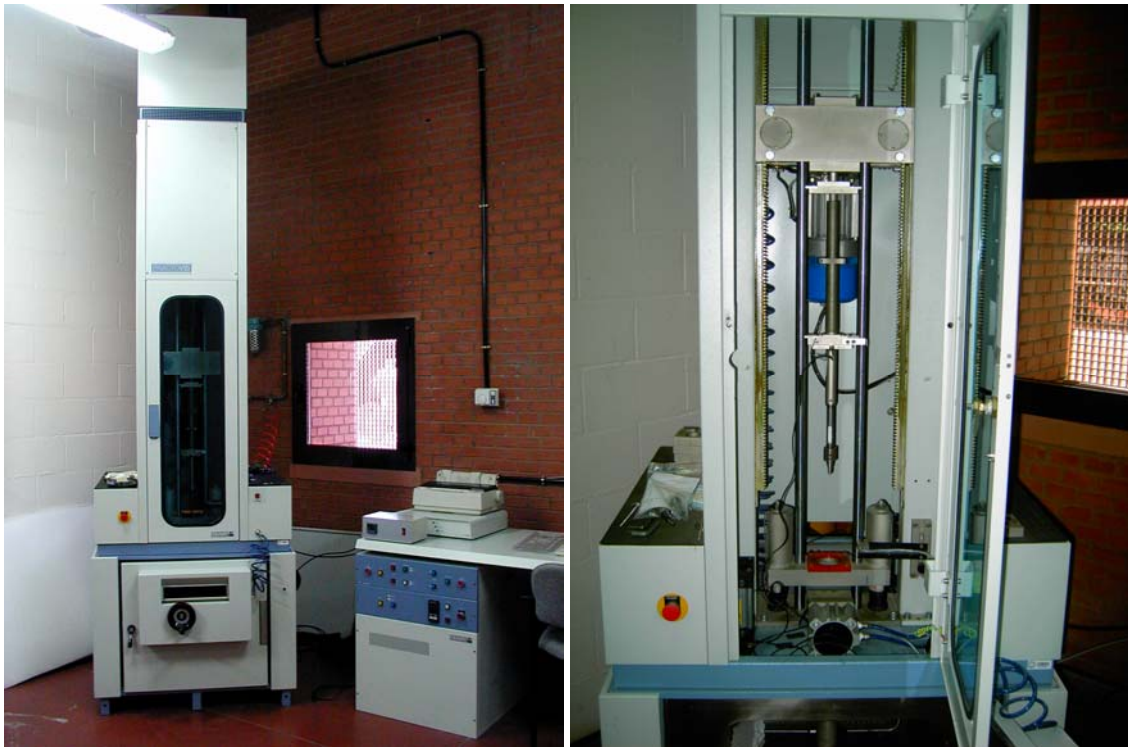
El dispositivo de ensayo empleado es una torre de caída de peso instrumentada de la marca CEAST Fractovist, modelo 6785, figura 4.3a. El equipo de adquisición de datos DAS 4000 que está dotado con un software para el tratamiento de la información, que puede registrar hasta un máximo de 4000 datos con un tiempo de muestreo mínimo de 1  $\mu$ s.

La torre de caída está constituida por dos cámaras.

- **Cámara superior**, denominada cámara del impactador, figura 4.3b. Consta de un cabezal móvil denominado impactador o percutor que está guiado por columnas para que el desplazamiento sea vertical. Este puede ser lanzado desde una altura máxima de caída libre de 1 m, aunque dispone de un sistema de muelles para simular caídas de hasta 10 m.

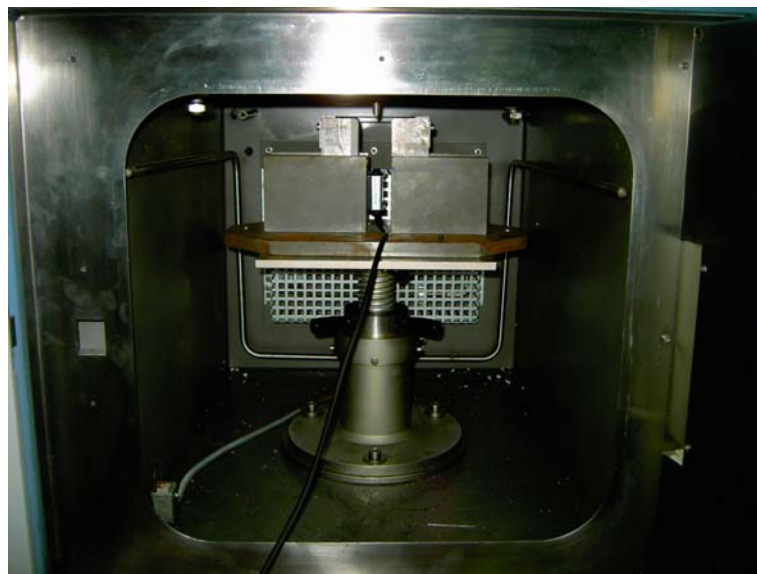
Esta cámara también consta de unos dispositivos encargados de absorber energía residual una vez realizado el impacto, llamados bloques de parada, y un equipo antirrebote que detiene el percutor tras el primer impacto sobre la probeta, que está controlado por un sistema neumático activado por un fotodetector.

- **Cámara inferior**, figura 4.3c. Constituye una base de gran masa que proporciona rigidez al sistema. En ella se coloca el útil sobre el que se sitúa la probeta. La cámara inferior es también una cámara climática.



a)

b)



c)

Figura 4.3. Torre de caída de peso: a) vista general, b) cámara superior, c) cámara inferior con el útil de flexión en tres puntos instalado.

La carga fue aplicada en la sección central de las probetas mediante un percutor instrumentado de masa 3,86 kg con punta tipo Charpy, figura 4.4.



Figura 4.4. Extremo del percutor tipo Charpy.

Como resultado del ensayo se obtiene un registro de la fuerza que el percutor ejerce sobre la probeta en cada instante de tiempo, figura 4.5. Esta señal presenta una serie de oscilaciones que pueden ser debidas a las vibraciones de la probeta y del percutor durante el impacto (Found et al. 1998) y que se analizarán más adelante. A partir de la señal de fuerza-tiempo se puede determinar el desplazamiento de la sección central de la probeta en cualquier instante mediante integraciones sucesivas. Dada la importancia de esta señal, las simulaciones numéricas del ensayo deben reproducir estos registros fuerza-tiempo, puesto que de estas señales depende que se puedan obtener resultados válidos en el ensayo.

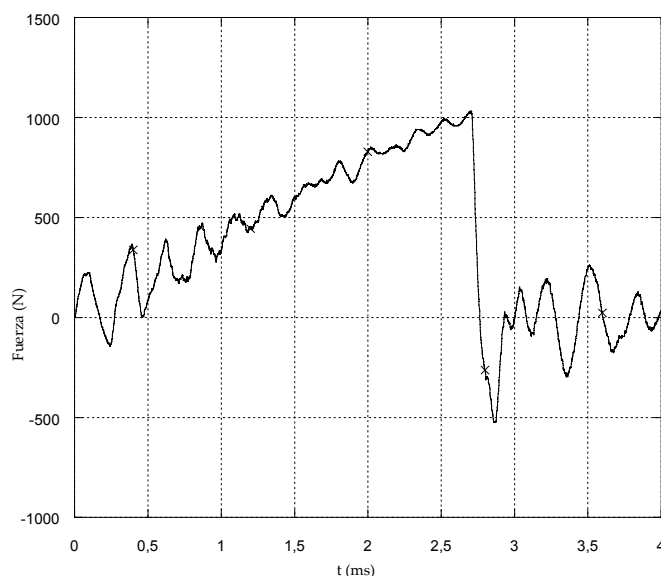


Figura 4.5. Curva fuerza-tiempo registrada en el ensayo de flexión en tres puntos en torre de caída sobre un laminado unidireccional con energía de impacto de 30 J.

#### 4.3.2.1. Técnicas de medida del desplazamiento

La torre de caída instrumentada proporciona, como resultado del impacto, una curva fuerza-tiempo. Para calcular el desplazamiento de la sección media de la probeta, la técnica de medida del desplazamiento más habitual en este tipo de dispositivos consiste en realizar integraciones sucesivas de la mencionada curva fuerza-tiempo. Para comparar esta herramienta de estimación indirecta del desplazamiento con técnicas de medición directa, se emplearon dos dispositivos adicionales: una cámara de alta velocidad y un transductor óptico de desplazamiento.

#### Integración del registro fuerza-tiempo

A partir de la señal de la fuerza en función del tiempo, figura 4.5, y asumiendo la hipótesis de contacto permanente entre probeta y percutor, se puede determinar el desplazamiento de la sección central de la probeta en cualquier instante.

En primer lugar, la aceleración sufrida por el percutor,  $a(t)$ , (figura 4.6) se puede calcular fácilmente mediante equilibrio de fuerzas dinámico sobre el percutor, ecuación 4.6.

$$a(t) = \frac{F(t) - P}{m} \quad (4.6)$$

donde  $F(t)$  es la fuerza de contacto,  $m$  la masa del percutor y  $P$  su peso.

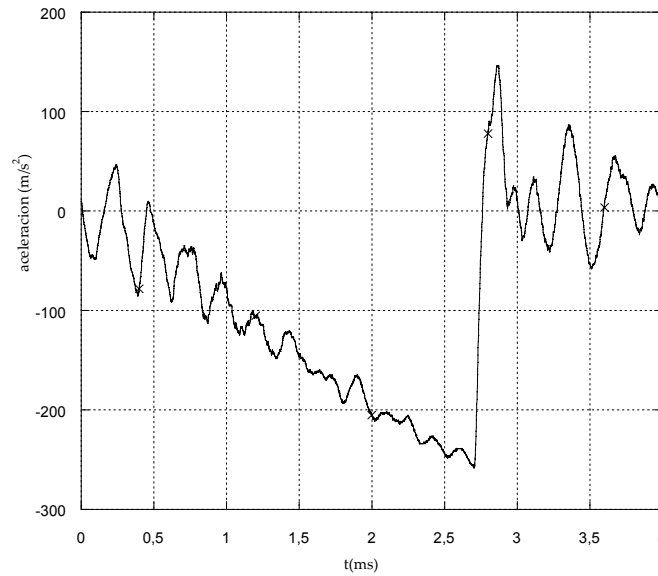


Figura 4.6. Curva aceleración-tiempo en el ensayo de flexión en tres puntos en torre de caída de un laminado unidireccional con energía de impacto de 30 J.

Mediante una integración numérica, se puede deducir la velocidad durante el impacto,  $v(t)$ , (figura 4.7) mediante la ecuación 4.7.

$$v(t) = v_0 - \int_0^t \frac{F(t) - P}{m} dt \quad (4.7)$$

siendo  $v_0$  la velocidad con la que el percutor impacta sobre la probeta. En el equipo utilizado esta velocidad se calcula mediante un balance de energías conociendo la altura y la masa del percutor.

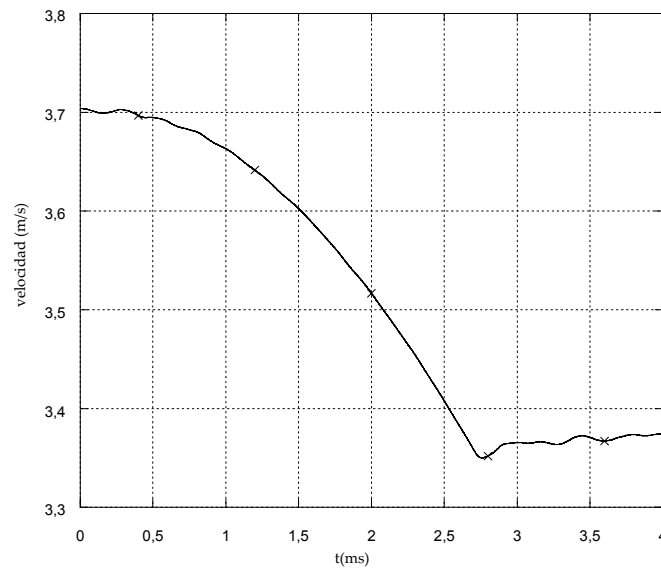


Figura 4.7. Curva velocidad-tiempo en el ensayo de flexión en tres puntos en torre de caída sobre un laminado unidireccional con energía de impacto de 30 J.

Mediante otra integración se obtiene el desplazamiento del extremo del percutor durante el impacto,  $x(t)$ , figura 4.8.

$$x(t) = \int_0^t \left[ v_0 - \int_0^t \frac{F(t) - P}{m} dt \right] dt \quad (4.8)$$

donde el desplazamiento inicial de la probeta se considera cero.

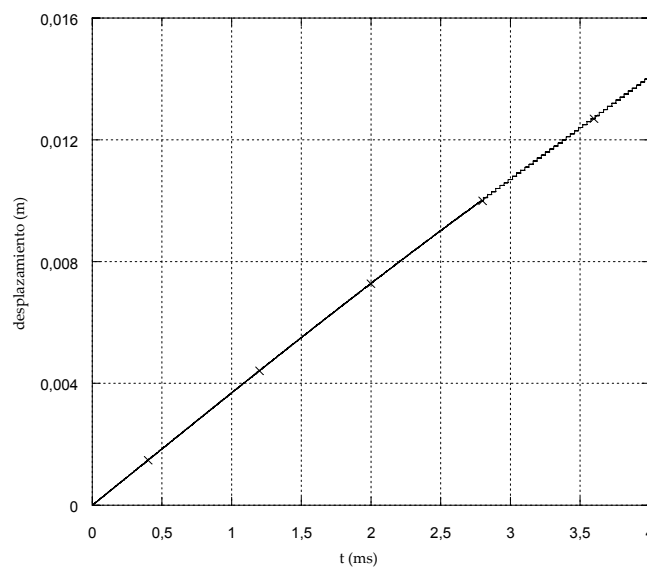


Figura 4.8. Curva desplazamiento-tiempo en el ensayo de flexión en tres puntos en torre de caída de un laminado unidireccional con energía de impacto de 30 J.

Asumiendo que existe un contacto permanente entre el percutor y la probeta, que no existe deformación en el percutor y que el espesor de la probeta no varía, se puede suponer que el desplazamiento vertical de la probeta es igual al del extremo del percutor.

### **Cámara de alta velocidad**

La configuración del ensayo de flexión en tres puntos permite visualizar mediante una cámara el desplazamiento vertical durante el impacto, tanto del percutor como de la probeta.

La cámara de alta velocidad utilizada, modelo Photron APX RS, permite tomar un máximo de 250.000 imágenes por segundo, figura 4.9. Los ensayos de impacto de baja velocidad en torre de caída tienen una duración del orden del milisegundo, con lo que es posible tomar una gran cantidad de imágenes durante el ensayo y conocer la evolución temporal del desplazamiento vertical.



Figura 4.9. Cámara de alta velocidad Photron APX RS.

Durante los ensayos realizados en esta tesis se tomaron 20.000 imágenes por segundo, con una resolución de 512x256 pixels, y se estimó el desplazamiento vertical gracias a una escala de referencia colocada en el útil, figura 4.10.





Figura 4.10. Imagen tomada con la cámara de alta velocidad antes de la rotura del laminado en un ensayo de flexión dinámica.

La cámara de alta velocidad permite obtener más información aparte del desplazamiento vertical, por ejemplo, es posible comprobar que no se produce ninguna separación entre el percutor y la probeta o entre la probeta y los apoyos durante el impacto, de esta forma se comprueba que se mantiene la configuración de flexión en tres puntos durante todo el ensayo. También es posible visualizar el proceso de rotura del laminado, figura 4.11.



Figura 4.11. Imagen tomada con la cámara de alta velocidad tras la rotura del laminado en un ensayo de flexión dinámica.

### Transductor óptico de desplazamiento

Se ha empleado un transductor óptico de desplazamiento, equipado con un diodo láser de 670 nm, para realizar una medida directa del desplazamiento en la cara inferior de la probeta. Este transductor tiene un rango de trabajo de 20 mm y una frecuencia de muestreo de 136 KHz.

Es un equipo pequeño y compacto, que tiene gran parte de sus componentes electrónicos en una unidad aparte, figura 4.12. Sus pequeñas dimensiones permiten colocarlo fácilmente en espacios reducidos, sin embargo, tiene una elevada distancia de trabajo, entre 55 y 75 mm, que puede representar un inconveniente. Sumando la distancia de trabajo máxima, la longitud del propio transductor y una distancia de seguridad para el cableado, se necesitan unos 150 mm libres en el útil por debajo de la cara inferior de la probeta, esto impide poder utilizarlo en los dispositivos habituales para un ensayo de flexión en tres puntos en torre de caída.



Figura 4.12. Transductor óptico de desplazamiento.

Ha sido necesario diseñar y construir un útil específico para poder emplear este dispositivo de medida directa del desplazamiento. En este útil, se ha tenido en cuenta que es necesario colocar el transductor óptico de desplazamiento, lo que ha provocado que tanto sus dimensiones como su peso sean muy superiores a otros

dispositivos parecidos, figura 4.13. Los planos acotados de este dispositivo se presentan en el anejo C.

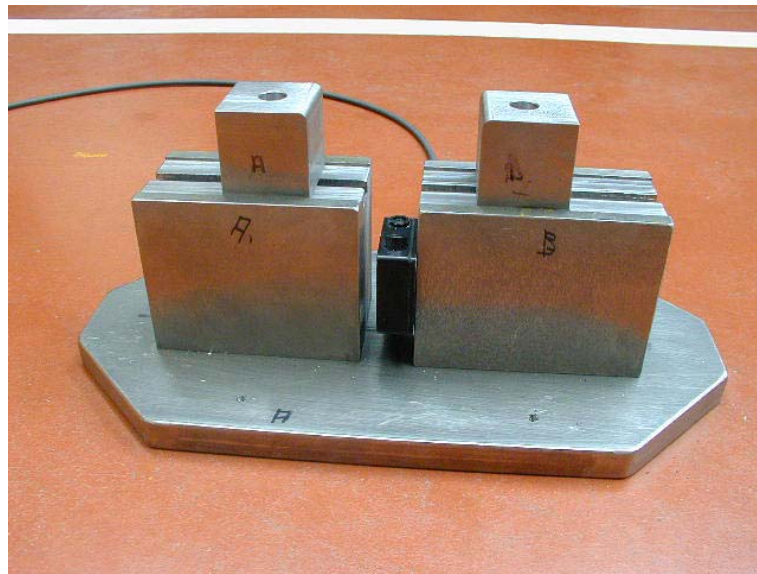


Figura 4.13. Útil de flexión en tres puntos preparado para utilizar el transductor óptico de desplazamiento.

Durante el ensayo, el transductor óptico registra el desplazamiento de la sección central de la probeta para cada instante de tiempo, figura 4.14.

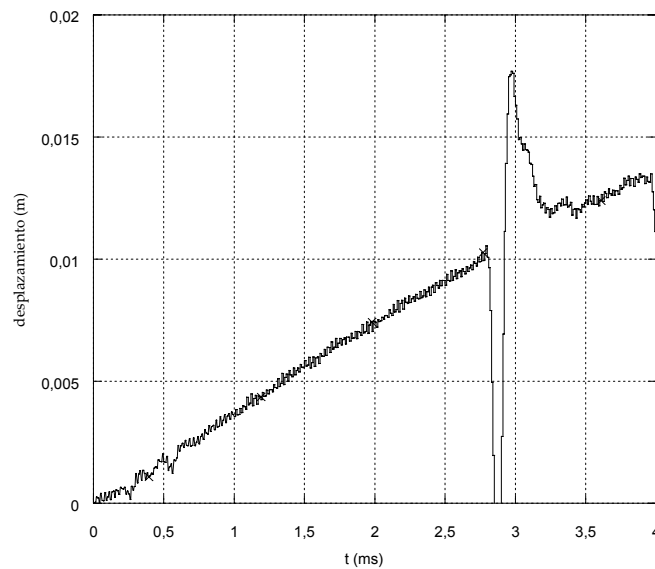


Figura 4.14. Registro desplazamiento-tiempo obtenido con el transductor óptico de desplazamiento en un ensayo de impacto en la torre de caída.

El transductor óptico registra la distancia a la que se encuentra un objeto situado en su línea de medida, siempre que se encuentre dentro del rango de trabajo. Como puede apreciarse en la figura 4.14, en el momento de la rotura de la probeta se produce una pérdida de señal, esto es debido a que sobre el transductor óptico hay una gran cantidad de material desprendido de la probeta rota, figura 4.11. Una vez han caído todos los fragmentos de la probeta, el diodo láser apunta directamente al percutor y se recupera la señal.

#### 4.3.2.2. Análisis de los resultados del ensayo

Una vez obtenidos los valores del desplazamiento se puede construir la curva fuerza-desplazamiento, figura 4.15. A partir de esta curva se obtienen los resultados más significativos de un ensayo de flexión dinámica, como la resistencia mecánica a flexión, el módulo aparente a flexión y la energía absorbida por la sección transversal de la probeta hasta la rotura.

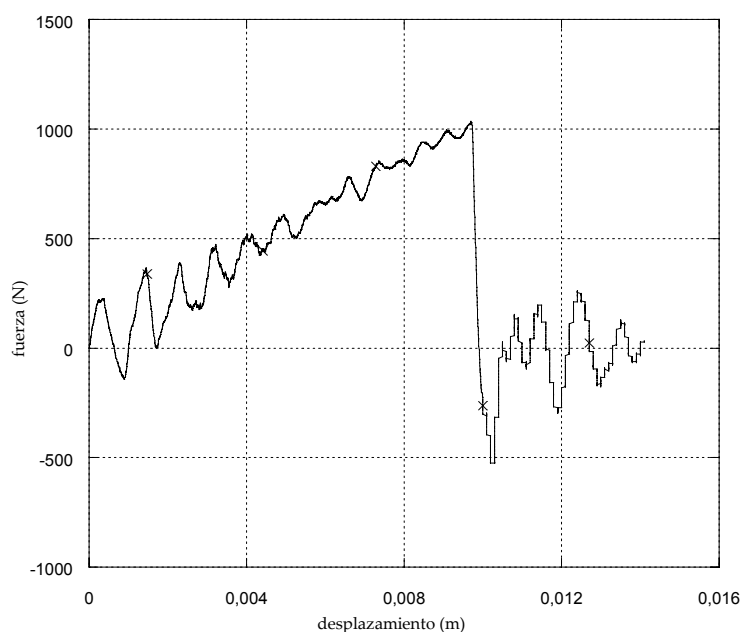


Figura 4.15. Curva fuerza-desplazamiento en el ensayo de flexión en tres puntos en torre de caída de un laminado unidireccional con energía de impacto de 30 J.

Ante la ausencia de normativa para ensayos dinámicos, se ha empleado la formulación recomendada por la norma para flexión en tres puntos en condiciones estáticas, ASTM D790-98, para obtener estos valores. Se ha estimado que el tiempo de duración de los ensayos es del orden de cinco veces el tiempo característico de oscilación de la probeta, luego no es necesario considerar las fuerzas de inercia en el análisis según los estudios realizados en el capítulo anterior, figura 3.10.

La resistencia mecánica a flexión se obtiene mediante la teoría de Resistencia de Materiales para materiales isótropos:

$$\sigma_f = \frac{3LF_{\max}}{2bh^2} \quad (4.9)$$

donde  $\sigma_f$  es la tensión máxima en la probeta y  $F_{\max}$  el valor máximo de la fuerza.

En caso de que el desplazamiento vertical máximo sea superior al 10% de la distancia entre apoyos, es necesario recurrir a la teoría de grandes desplazamientos:

$$\sigma_f = \frac{3LF_{\max}}{2bh^2} [1 + 6 \cdot (\delta/L)^2 - 4 \cdot (h/L) \cdot (\delta/L)] \quad (4.10)$$

donde  $\delta$  es la deflexión de la sección central de la probeta.

El módulo a flexión aparente es calculado a partir de la pendiente de la curva fuerza-desplazamiento.

$$E_a = \frac{L^3}{48I} \cdot \left( \frac{F}{\delta} \right) \quad (4.11)$$

siendo  $F/\delta$  la pendiente de la curva fuerza-desplazamiento e  $I$  el momento de inercia.

La energía absorbida hasta rotura se calcula mediante la integración numérica de la curva fuerza-desplazamiento. Esta energía se puede calcular para cada instante de tiempo, figura 4.16.

$$E(t) = \int_0^t F(t) \left[ v_0 - \int_0^t \frac{F(t) - P}{m} dt \right] dt \quad (4.12)$$

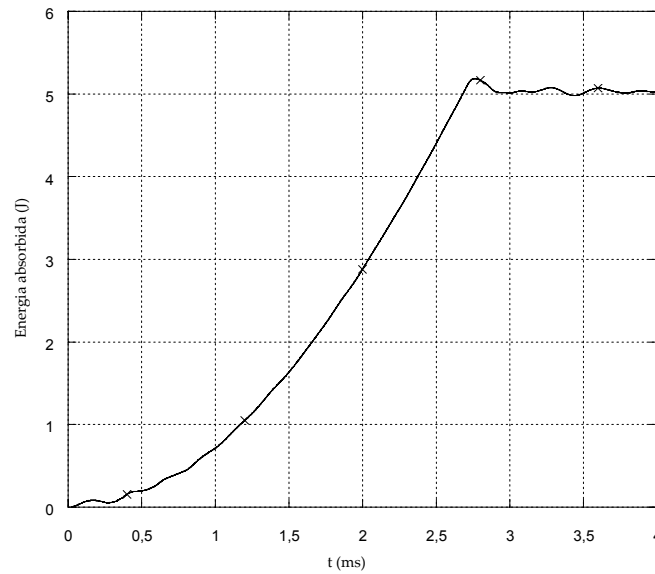


Figura 4.16. Curva energía-tiempo en el ensayo de flexión en tres puntos en torre de caída de un laminado unidireccional. Energía de impacto 30 J.

Esta curva es representativa de un ensayo en el que produce la rotura de la probeta. La energía absorbida por la probeta crece durante la deformación tanto por la acumulación de energía elástica como por los diferentes mecanismos de daño que tienen lugar. Cuando esta energía alcanza un cierto valor, se produce la rotura de la probeta y el valor de la energía absorbida, a partir de ese instante, permanece constante.

### 4.3.3. Modelización del ensayo de flexión dinámica

Para simular los ensayos de flexión dinámica en la torre de caída no sólo es necesario disponer de un modelo de comportamiento mecánico del material del que están constituidas las probetas, sino que ha sido necesario realizar un modelo numérico del percutor y de los apoyos sobre los que descansa la probeta.

Analizando los registros de fuerza obtenidos en los ensayos, figura 4.5, se ha observado que aparece un nivel de ruido importante en las señales que puede deberse a la excitación de alguna frecuencia propia del percutor. Se ha optado, por tanto, por simular el ensayo con la máxima exactitud posible con un coste computacional razonable, tratando de reproducir no sólo la respuesta de la viga, sino también las señales fuerza-tiempo. Ha sido necesario definir una interacción entre la superficie del percutor (superficie maestra) y los nodos de la probeta (elementos esclavos) para garantizar el contacto aún después de que ciertos elementos de la probeta hayan sido eliminados. En el proceso de mallado se ha realizado un proceso de refinado para alcanzar un compromiso aceptable entre la precisión de los resultados y el coste computacional.

La geometría del percutor se ha reproducido lo más fielmente posible en el modelo numérico, figura 4.17, manteniendo un coste computacional aceptable. En el mallado se han empleado elementos tanto tetraédricos de cuatro nodos, C3D4 en Abaqus, como hexaédricos de ocho nodos con integración reducida, C3D8R en Abaqus, ya que eran necesarios distintos tipos de elementos en diferentes zonas del percutor. La malla está más afinada en la punta del percutor por tratarse de la zona de contacto con la probeta donde se espera que las tensiones sean más elevadas.

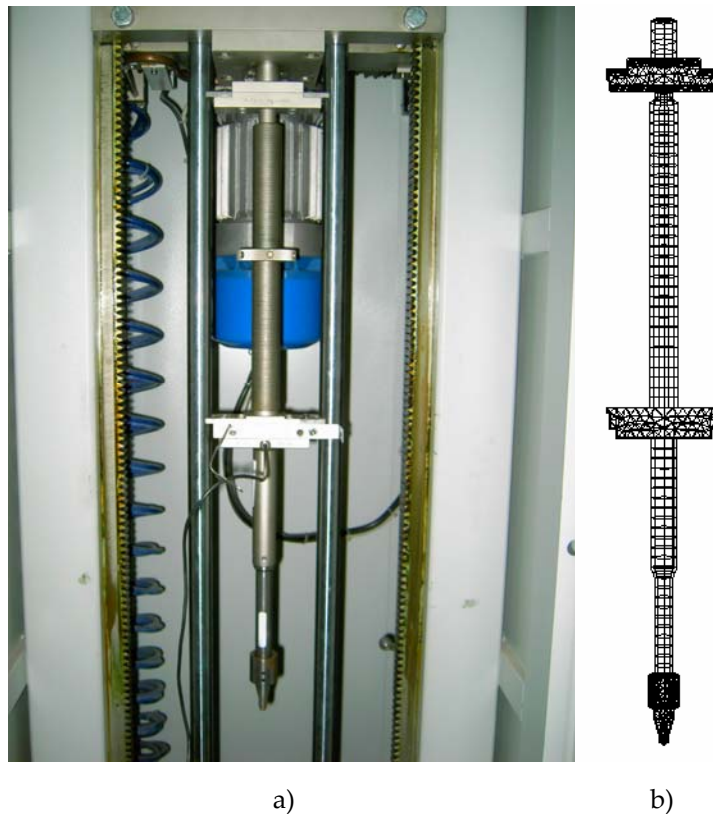


Figura 4.17: a) percutor empleado en los ensayos, b) modelo numérico del percutor.

En la modelización de los apoyos, figura 4.18, se han empleado elementos tetraédricos C3D4, y hexaédricos C3D8R, para conseguir el mismo radio de acuerdo que en el dispositivo experimental.

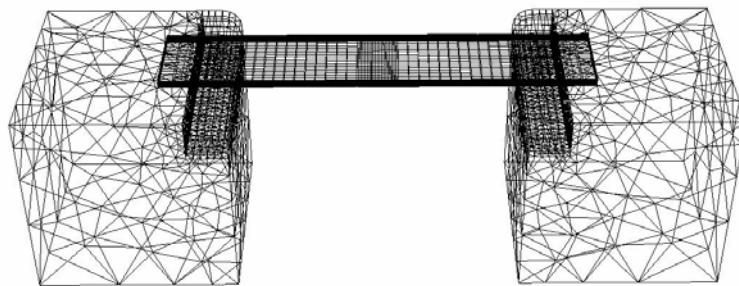


Figura 4.18. Modelo numérico de la probeta y los apoyos.

El modelo de comportamiento mecánico utilizado para el material del que están constituidos el percutor y los apoyos es elástico lineal ( $E=210$  GPa,  $\nu=0,3$  y  $\rho=7800$  kg/m<sup>3</sup>).



Todos los elementos empleados en el modelo numérico de la probeta son elementos cúbicos de ocho nodos de integración reducida C3D8R. Se han definido dos elementos a lo largo del espesor de cada lámina y la malla ha sido refinada en la zona de contacto con el percutor, figura 4.19, por ser la zona donde se esperan mayores deformaciones y donde se producirá la rotura.

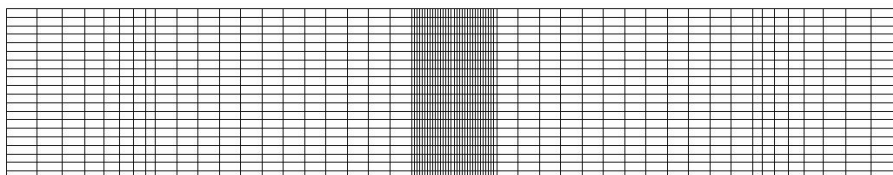


Figura 4.19. Modelo numérico de la probeta de 105x20x2mm<sup>3</sup>.

## 4.4. Validación del modelo de comportamiento

La validación de este modelo numérico se ha realizado mediante la comparación de resultados experimentales con los obtenidos mediante el modelo de elementos finitos del ensayo de flexión en tres puntos en torre de caída, implementando el modelo de comportamiento mecánico a través de una subrutina de usuario en lenguaje de programación FORTRAN. Para disponer de resultados experimentales con la precisión que requiere esta validación, ha sido necesario llevar a cabo un estudio previo en el que se han comparado diferentes técnicas experimentales de medida de desplazamiento.

#### 4.4.1. Planteamiento del proceso de validación

Los resultados del ensayo de flexión dinámica dependen de varios parámetros entre los que destacan la energía de impacto y la distancia entre apoyos. Para verificar la robustez de la simulación frente a cambios en estos parámetros de ensayo se han realizado tres tipos de ensayo:

- Ensayos de rotura tipo 1
  - Geometría de probeta: 80x20x2 mm<sup>3</sup>
  - Distancia entre apoyos: 50 mm
  - Relación L/h: 25
  - Energía de impacto: 20 Julios
  
- Ensayos de rotura tipo 2
  - Geometría de probeta: 105x20x2 mm<sup>3</sup>
  - Distancia entre apoyos: 80 mm
  - Relación L/h: 40
  - Energía de impacto: 20 Julios
  
- Ensayos de rotura tipo 3
  - Geometría de probeta: 105x20x2 mm<sup>3</sup>
  - Distancia entre apoyos: 80 mm
  - Relación L/h: 40
  - Energía de impacto: 30 Julios

Las energías de impacto fueron seleccionadas para garantizar la rotura de las probetas en todos los casos.

#### 4.4.2. Comparación de las técnicas de medida del desplazamiento

En los ensayos en torre de caída la medida del desplazamiento vertical máximo se suele realizar de forma indirecta a través del registro fuerza-tiempo, para determinar la precisión de este tipo de medida se han comparado cuatro técnicas distintas de medida del desplazamiento:

- Técnica tradicional, cálculo del desplazamiento a partir de integraciones sucesivas del registro fuerza-tiempo estimando la velocidad de impacto a partir de igualar la energía cinética en el instante del impacto a la energía potencial inicial.
- Técnica tradicional mejorada, al igual que en la técnica tradicional consiste en la integración del registro fuerza-tiempo, pero en este caso, la velocidad de impacto se mide directamente a través de la cámara de alta velocidad.
- Cámara de alta velocidad, medida directa del desplazamiento a través de las imágenes tomadas durante el impacto.
- Transductor óptico de desplazamiento, se realiza una medida directa del desplazamiento de la cara inferior de la probeta.

Para seleccionar la técnica de medida óptima, se han comparado éstas entre sí atendiendo a tres requisitos para garantizar la fiabilidad de los resultados del ensayo:

- **Precisión:** el error cometido debe ser el menor posible.
- **Frecuencia de muestreo:** para poder calcular la energía absorbida con precisión a través de la integración numérica se necesita un número de datos considerable.

- **Sincronización:** es necesario que los datos obtenidos de fuerza y desplazamiento estén sincronizados para poder realizar la integración y calcular la energía absorbida.

En la siguiente figura se muestra el desplazamiento vertical máximo calculado con las cuatro técnicas de medida en cada uno de los tres tipos de ensayo.

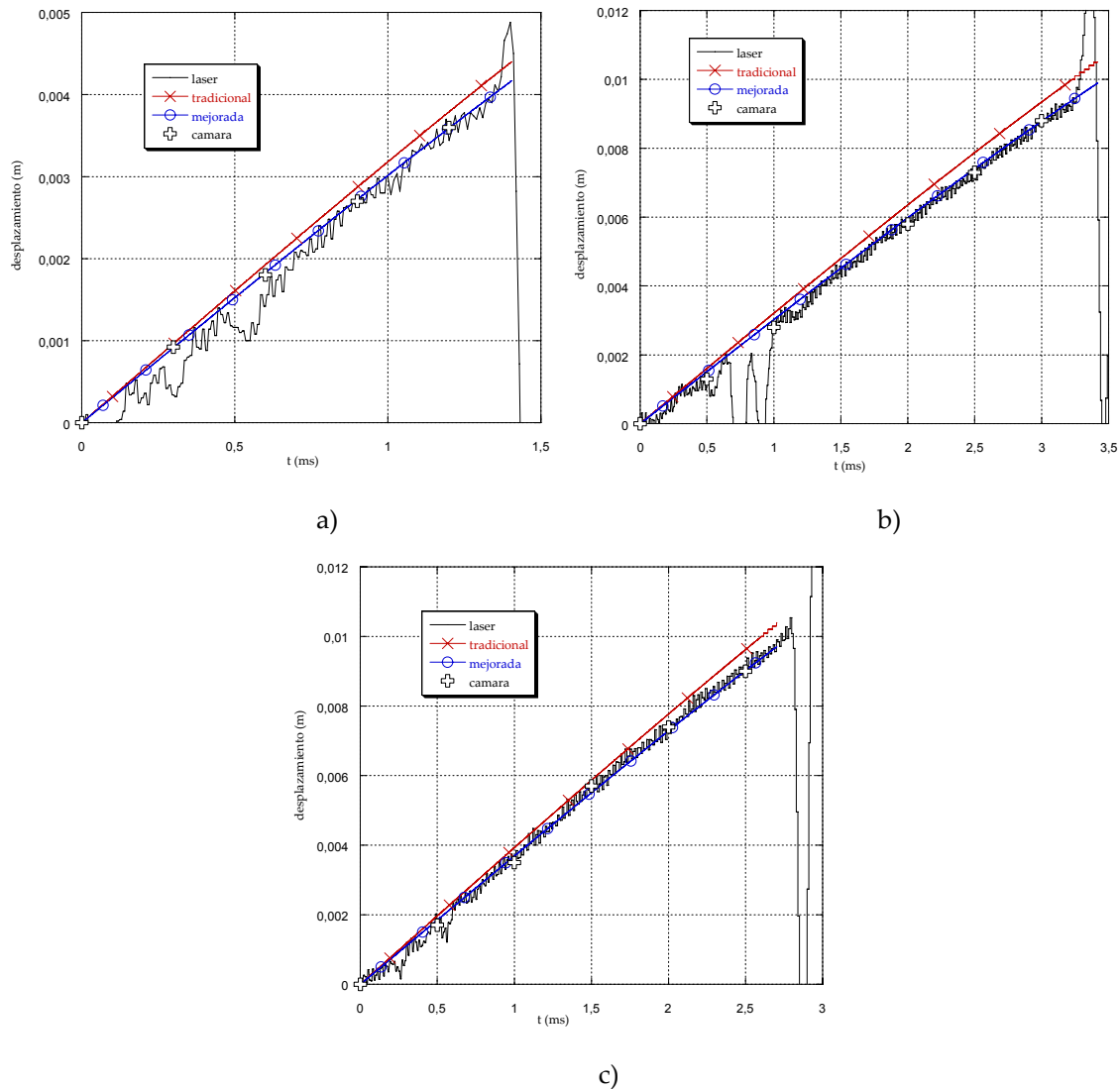


Figura 4.20. Desplazamiento dinámico calculado con las cuatro técnicas de medida: a) ensayos de rotura de tipo 1 ( $E_{imp}=20$  J,  $L=50$  mm), b) ensayos de rotura de tipo 2 ( $E_{imp}=20$  J,  $L=80$  mm), c) ensayos de rotura tipo 3 ( $E_{imp}=30$  J,  $L=80$  mm).

Si se comparan las distintas técnicas atendiendo a la precisión de los resultados obtenidos, se observa que hay tres técnicas que presentan resultados muy parecidos: la técnica de la integración mejorada, el transductor óptico de

desplazamiento y la cámara de alta velocidad. Sin embargo, la técnica tradicional de integración estima un desplazamiento en torno a un 5% mayor que el de las otras tres técnicas. Al comparar estos resultados se deduce que la técnica de la integración de la fuerza es fuertemente dependiente del valor de la velocidad inicial, siendo importante el error cometido si no se conoce dicha velocidad con exactitud.

El transductor óptico de desplazamiento es capaz de estimar la posición de la cara inferior de la probeta con bastante precisión, siempre que no exista algún objeto que se coloque entre el diodo láser y la probeta. Cuando se produce el impacto y se rompen algunas fibras, éstas cruzan sobre la vertical del diodo láser y producen una oscilación brusca en la señal como se observa en la figura 4.20b. En este caso la rotura de fibras ocurre en un tiempo situado entre 0,5 ms y 1 ms de duración del ensayo.

En cuanto a la frecuencia de muestreo, se obtiene un número de datos suficiente tanto en el caso de las técnicas de integración de la fuerza como con el transductor óptico de desplazamiento. La cámara de alta velocidad es capaz de obtener una gran cantidad de imágenes durante el ensayo, sin embargo, procesar esas imágenes de forma automatizada para calcular el desplazamiento requiere desarrollar un software de tratamiento de imágenes. En este caso se ha procesado un pequeño número de imágenes, una por una, de forma que la frecuencia de muestreo es demasiado pequeña como para calcular la energía absorbida con precisión.

El equipo de adquisición de datos utilizado no permite la toma de datos sincronizada con otros dispositivos, esto supone un gran inconveniente a la hora de integrar los resultados de fuerza y desplazamiento. En la figura 4.20, se observa que es posible sincronizar los resultados de todas las técnicas de medida para comparar los desplazamientos, sin embargo, en la integración de esos resultados, un pequeño error de sincronización supone un gran error en el cálculo de la

energía absorbida. Desde este punto de vista, las técnicas que presentan más ventajas son las de integración puesto que toman como punto de partida los valores de la fuerza.

En la tabla 4.1 se muestran los criterios de comparación que cumplen las distintas técnicas de medida.

	Precisión	Frec. de muestreo	Sincronización
Tradicional		X	X
Mejorada	X	X	X
Cámara	X		
Láser	X	X	

Tabla 4.1. Criterios de comparación que cumplen las distintas técnicas de medida.

Atendiendo a los criterios de precisión, frecuencia de muestreo y sincronización, se ha seleccionado la técnica mejorada de integración de la fuerza, calculando la velocidad de impacto con la cámara de alta velocidad, para el cálculo del desplazamiento vertical máximo en el procesado de los ensayos.

### 4.4.3. Resultados experimentales

En cada ensayo, se ha obtenido el registro fuerza-tiempo proporcionado por el equipo de adquisición de datos de la torre de caída, y la velocidad de impacto, estimada con la cámara de alta velocidad. En la siguiente figura se puede observar un registro de fuerza-tiempo para cada tipo de ensayo realizado.

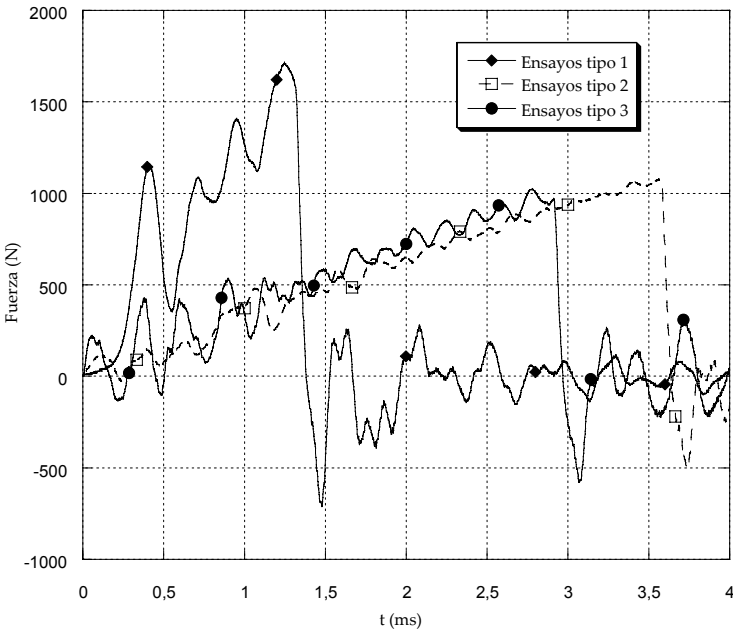


Figura 4.21. Curva fuerza-tiempo para los tres tipos de ensayos de rotura.

En el ensayo tipo 1 ( $E_{imp}=20J$ ,  $L=50mm$ ) la fuerza máxima es claramente superior a la registrada en los otros ensayos, en los que la distancia entre apoyos es mayor. Por otro lado, el tiempo de duración de los ensayos tipo 3 ( $E_{imp}=30J$ ,  $L=80mm$ ) es menor que en los ensayos tipo 2 ( $E_{imp}=20J$ ,  $L=80mm$ ) debido a una mayor energía de impacto.

Al modificar la distancia entre apoyos no sólo cambia la fuerza de rotura, sino que también varían las frecuencias propias del ruido presente en la señal. Se ha realizado una transformada de Fourier sobre los registros experimentales de fuerza-tiempo y se ha obtenido la frecuencia fundamental para cada una de ellas, tabla 4.2.

	Ensayos tipo 1		Ensayos tipo 2		Ensayos tipo 3	
	$E_{imp}=20 J$ , $L=50 mm$		$E_{imp}=20 J$ , $L=80 mm$		$E_{imp}=30 J$ , $L=80 mm$	
	media	desv.	media	desv.	media	desv.
Frec. propia (Hz)	3,15	0,19	4,12	0,09	4,02	0,09

Tabla 4.2. Frecuencias propias de los registros experimentales.

La diferencia en la frecuencia principal de las señales es muy pequeña para los ensayos tipo 2 y tipo 3, menor a un 3%, sin embargo, las señales obtenidas en los ensayos tipo 1, con una distancia entre apoyos menor, tienen una frecuencia fundamental completamente diferente. El ruido presente en los registros de fuerza, por tanto, no se puede atribuir exclusivamente a las frecuencias propias del percutor, puesto que la frecuencia propia de estas señales varía en función de la distancia entre apoyos empleada.

A través del registro de fuerza-tiempo y de la velocidad de impacto, se han procesado los ensayos calculando los resultados más importantes, como el valor máximo de la fuerza registrada, el desplazamiento de la sección central de la probeta en el instante de rotura, el tiempo de duración del ensayo, la energía absorbida, la resistencia mecánica a flexión y el módulo aparente a flexión. Para el cálculo de la resistencia mecánica en los ensayos tipo 2 y tipo 3, con la distancia entre apoyos de 80 mm, ha sido necesario emplear la formulación de grandes desplazamientos, ecuación 4.10.

En la siguiente tabla se muestran los resultados experimentales.

	Ensayos tipo 1 $E_{imp}=20 \text{ J}$ , $L=50 \text{ mm}$		Ensayos tipo 2 $E_{imp}=20 \text{ J}$ , $L=80 \text{ mm}$		Ensayos tipo 3 $E_{imp}=30 \text{ J}$ , $L=80 \text{ mm}$	
	media	desv.	media	desv.	media	desv.
Fuerza máxima (N)	1732	77	1009	53	1004	22
Despl. Rotura (mm)	3,78	0,22	9,58	0,49	9,45	0,38
Tiempo de duración (ms)	1,38	0,05	3,48	0,14	2,74	0,11
Energía absorbida (J)	3,12	0,1	4,88	0,5	4,75	0,3
Resistencia a flexión (MPa)	1620	72	1510	79	1510	33
Módulo aparente a flexión (GPa)	80,9	2,5	86,5	4,5	84,9	3,4

Tabla 4.3. Resultados experimentales de los ensayos de flexión en condiciones dinámicas.



Los valores obtenidos de resistencia mecánica y de módulo aparente a flexión son muy parecidos en los tres tipos de ensayos realizados, a pesar de que varíe la fuerza de rotura o el tiempo de duración del ensayo no se aprecian cambios en las propiedades mecánicas del material. Analizando los datos en conjunto se puede estimar la resistencia mecánica a flexión en condiciones dinámicas en 1550 MPa, con una desviación del 4%, y el módulo aparente a flexión en 84,1 GPa, con una desviación del 3%.

Cuando la distancia entre apoyos es menor, la fuerza de rotura aumenta considerablemente, pero el valor de resistencia mecánica a flexión permanece constante. Por otro lado, si se varía la energía de impacto, cambia el tiempo de duración del ensayo pero el módulo aparente a flexión mantiene un mismo valor.

#### **4.4.4. Resultados numéricos**

La simulación numérica permite obtener los valores de la fuerza ejercida por el percutor sobre la superficie de la probeta para cada instante de tiempo, y compararlos con los registros obtenidos experimentalmente, figura 4.22.

Se puede observar la similitud entre las señales numéricas y las experimentales, no sólo en los resultados más significativos, como son la fuerza máxima o el tiempo de duración del ensayo, sino también el ruido presente en las señales. Se ha realizado una transformada de Fourier sobre las señales numéricas y se han comparado las frecuencias fundamentales con las experimentales, tabla 4.4.

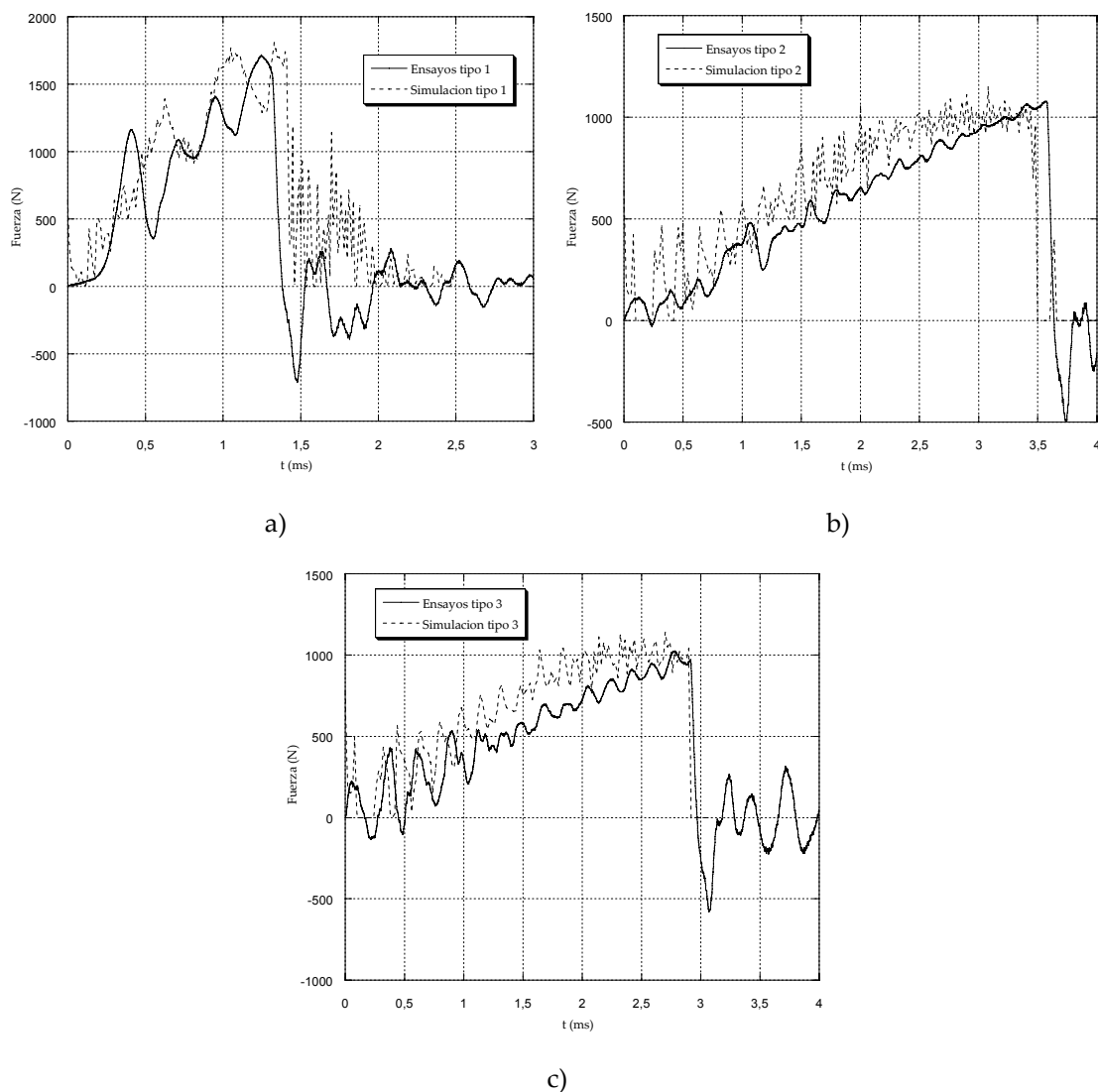


Figura 4.22. Comparación de los registros experimentales de fuerza con los resultados del modelo numérico: a) ensayos de tipo 1, b) ensayos de tipo 2, c) ensayos de tipo 3.

	Frec. Experimental (Hz)	Frec. Numérica (Hz)	diferencia
Ensayos tipo 1 $E_{imp}=20 \text{ J}$ , $L=50 \text{ mm}$	3,15	2,86	9%
Ensayos tipo 2 $E_{imp}=20 \text{ J}$ , $L=80 \text{ mm}$	4,12	4,88	16%
Ensayos tipo 3 $E_{imp}=30 \text{ J}$ , $L=80 \text{ mm}$	4,02	4,83	17%

Tabla 4.4. Comparación entre las frecuencias de las señales experimentales y numéricas.

Los valores de la frecuencia fundamental del ruido presente en los registros de fuerza experimentales y numéricos son similares, aunque las diferencias alcanzan el 17%, tabla 4.4. Estas diferencias, sin embargo, son fácilmente explicables si se tienen en cuenta las simplificaciones introducidas en el modelo numérico. El modelo numérico no considera las vibraciones laterales que se producen durante el impacto, ni el rozamiento que sufre el percutor con las guías verticales. Por otra parte, el percutor empleado no está constituido por una sola pieza, sino que consta de varios elementos ensamblados que pueden producir ciertas vibraciones. Además, otra posible fuente de ruido en la señal experimental son las vibraciones debidas a la flexibilidad de la propia torre de caída.

En las simulaciones numéricas de los ensayos, se ha obtenido el desplazamiento vertical máximo mediante dos técnicas distintas, por un lado, se han tomado los valores de desplazamiento de los nodos de la cara inferior de la probeta proporcionados por el programa de elementos finitos, los valores de este desplazamiento no varían a lo largo del espesor del laminado, por lo que se podrían haber utilizado los desplazamientos de otros nodos con el mismo resultado. Por otra parte, se ha calculado el desplazamiento integrando la señal fuerza-tiempo obtenida en las simulaciones numéricas de una forma análoga al procedimiento experimental. Estos dos resultados del desplazamiento vertical máximo se han comparado con los obtenidos en los ensayos experimentales, figura 4.23.

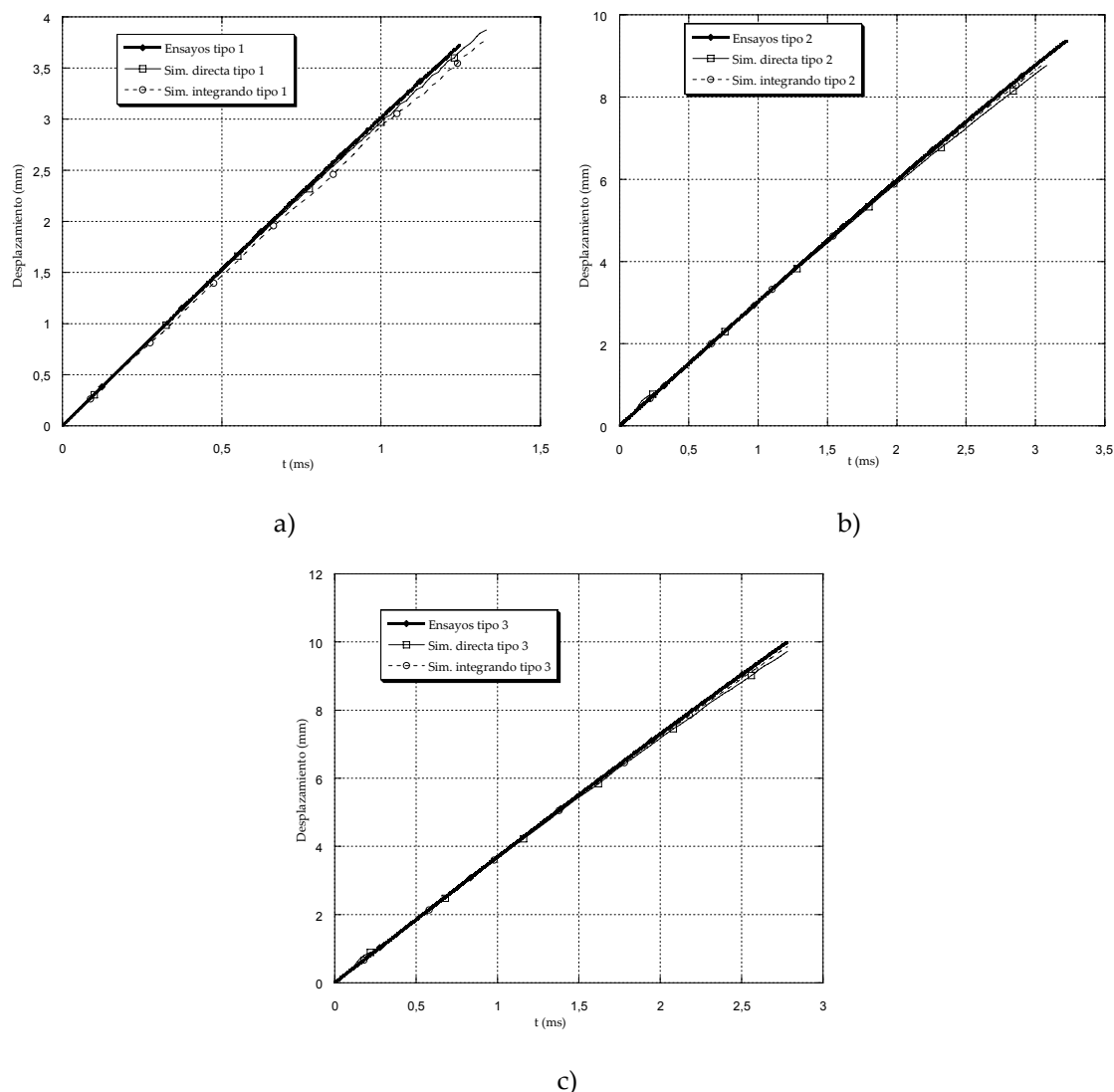


Figura 4.23. Comparación del desplazamiento vertical máximo experimental y numérico: a) ensayos de tipo 1, b) ensayos de tipo 2, c) ensayos de tipo 3.

El desplazamiento producido en la probeta en las simulaciones numéricas es muy similar al experimental, tanto si se compara el desplazamiento de los nodos como si se integra el registro de fuerza numérico. Este resultado confirma la solidez del modelo numérico y la validez de las técnicas experimentales de integración, siempre y cuando se conozca la velocidad de impacto con precisión. Los valores del desplazamiento máximo, en los ensayos tipo 2 y tipo 3, superan el 10% de la distancia entre apoyos, por lo que es necesario emplear la formulación de grandes desplazamientos para el cálculo de la resistencia a flexión.

En el análisis de las simulaciones numéricas de los ensayos se ha seguido el mismo procedimiento que en los ensayos experimentales, es decir, se han calculado los resultados a partir de la curva fuerza-tiempo y la velocidad de impacto del percutor. Se han comparado los ensayos experimentales con la simulación numérica de los mismos atendiendo a los resultados de fuerza máxima, desplazamiento de la sección central de la probeta en el instante de rotura, tiempo de duración del ensayo, energía absorbida por la probeta, resistencia mecánica a flexión y módulo aparente a flexión, tabla 4.5.

		$F_{\text{máx}}$ (N)	despl. <sub>rot</sub> (mm)	$T_{\text{duración}}$ (ms)	$E_{\text{abs}}$ (J)	$\sigma_f$ (MPa)	$E_a$ (GPa)
Ensayos tipo 1	Experimental	1732	3,78	1,38	3,12	1620	80,9
	E <sub>imp</sub> =20 J	1808	3,87	1,46	3,65	1695	78,7
	L=50 mm	Diferencia	4%	2%	6%	17%	5%
Ensayos tipo 2	Experimental	1009	9,58	3,48	4,88	1510	86,5
	E <sub>imp</sub> =20 J	1109	8,86	3,50	5,36	1664	92,9
	L=80 mm	Diferencia	10%	8%	1%	10%	10%
Ensayos tipo 3	Experimental	1004	9,45	2,74	4,75	1510	84,9
	E <sub>imp</sub> =30 J	1094	9,58	2,92	5,64	1641	86,1
	L=80 mm	Diferencia	9%	1%	7%	19%	9%

Tabla 4.5. Comparación entre resultados experimentales y numéricos.

Los resultados de las simulaciones numéricas son similares a los experimentales en cuanto a los valores más significativos. Las diferencias en la estimación de la resistencia mecánica son menores al 10% y en el cálculo del módulo aparente a flexión no superan el 7%. Así mismo, los resultados concuerdan en cuanto a tiempo de duración del ensayo o desplazamiento en el instante en que se produce la rotura. Únicamente en el caso del cálculo de la energía absorbida por la probeta se comete un error significativo, de hasta un 20%. Esto se debe a que la energía se calcula mediante la integral de la curva fuerza-desplazamiento lo que hace que se acumulen los errores en la medida de la fuerza y del desplazamiento.

Mediante las simulaciones numéricas, no sólo se ha conseguido reproducir el desplazamiento de la sección media, sino que también se ha reproducido el comportamiento global de la probeta durante el impacto, tanto antes, como después de la rotura.

En las figuras 4.24 y 4.25 se comparan los ensayos experimentales con las simulaciones numéricas, antes y después de la rotura respectivamente.

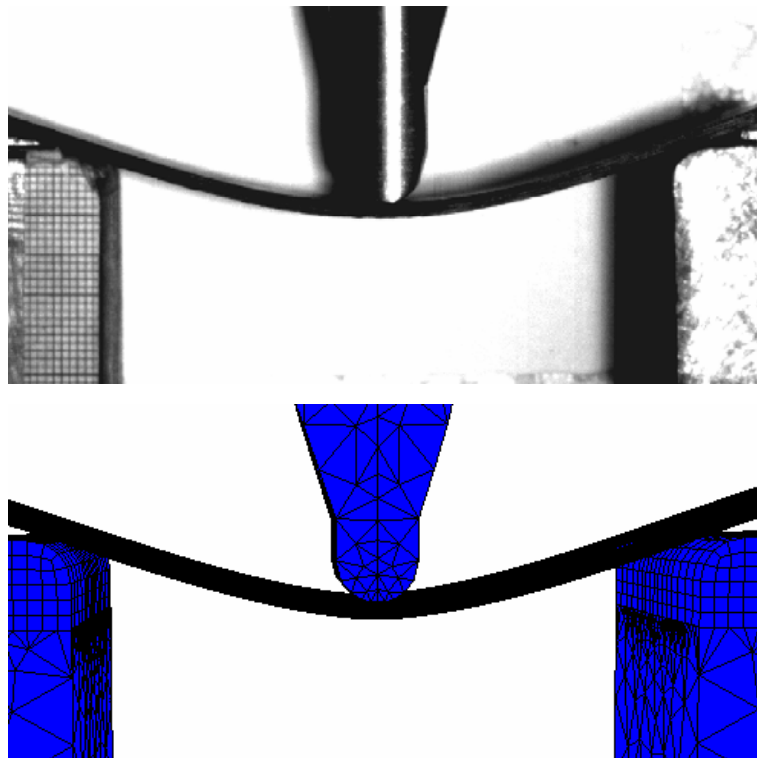


Figura 4.24. Comparación de un ensayo experimental con la simulación numérica antes de la rotura,  $t=2,5$  ms. Ensayo tipo 3.

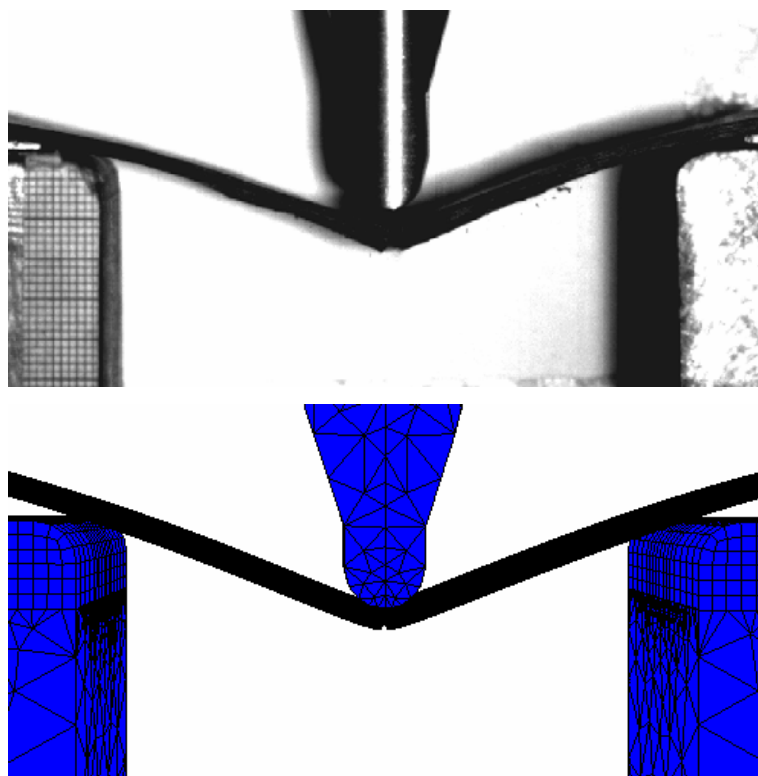


Figura 4.25. Comparación de un ensayo experimental con la simulación numérica después de la rotura,  $t=3,5$  ms. Ensayo tipo 3.

Una de las ventajas que supone disponer de una herramienta para la simulación numérica de ensayos es que se puede seguir la evolución de los criterios de rotura en cada punto de la probeta para comprender mejor el proceso de rotura, esta información es difícil de obtener experimentalmente. En la figura 4.26a, se muestra la evolución de los criterios de rotura en un nodo situado el centro de la cara inferior del laminado, para un ensayo de rotura tipo 3.

El criterio de rotura predominante es la rotura de fibras debido a que la cara inferior está sometida a tensiones de tracción y la superior a tensiones de compresión. La evolución del criterio de rotura y de la tensión principal es muy similar, figura 4.26, puesto que ambos valores están relacionados. Según avanza el ensayo, las tensiones a las que está sometida la probeta van aumentando y, por tanto, el criterio de rotura también crece. Antes de que el criterio de rotura alcance el valor unidad, comienza a aparecer un cierto nivel de daño en la probeta. Este daño degrada las propiedades mecánicas del material, que pierde rigidez

impidiendo un aumento de las tensiones. Si las tensiones cesan de aumentar, figura 4.26b, el criterio de rotura también se estabiliza, figura 4.26a. Esta evolución es progresiva, si las propiedades mecánicas se degradan la probeta se deforma cada vez más y, a su vez, las propiedades mecánicas del material estarán cada vez más degradadas. Cuando la deformación alcanza un determinado valor, se considera el fallo completo del material, en ese momento se produce una disminución brusca de las tensiones, así como del criterio de rotura.

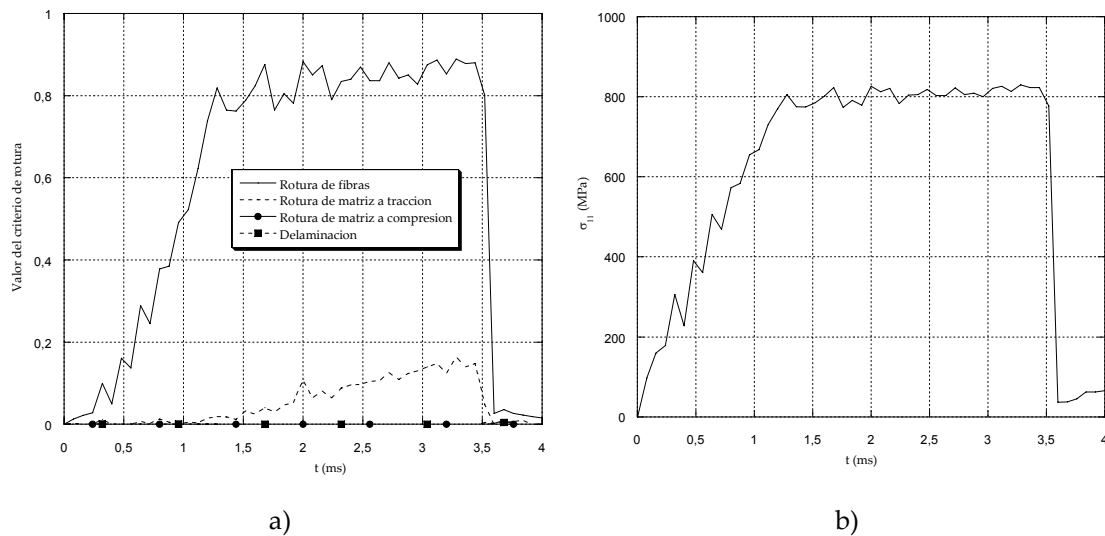


Figura 4.26. Evolución en el punto medio de la cara inferior de la probeta durante un ensayo de rotura tipo 3 de: a) valor de los criterios de rotura, b) tensión  $\sigma_{11}$ .

En la figura 4.27, se puede seguir esta evolución del valor del criterio de rotura de las fibras en cuatro momentos distintos de la simulación. Se comprueba que durante los primeros instantes del ensayo, figuras 4.27a y 4.27b, el criterio de rotura crece de forma más o menos lineal, sin embargo, cuando se alcanza un cierto valor y aparece un daño en el laminado, el valor del criterio de rotura tiende a estabilizarse, figura 4.27c. Finalmente, cuando se produce el fallo del laminado, figura 4.27d, el valor del criterio de rotura cae bruscamente.



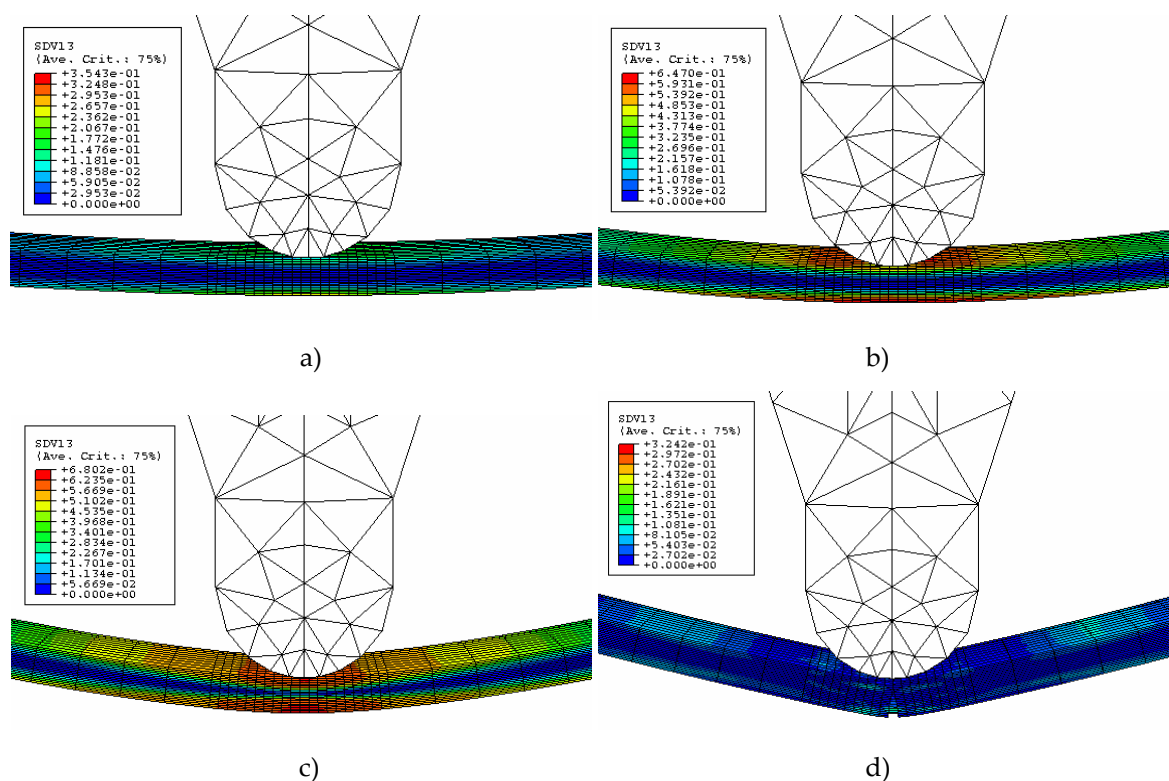


Figura 4.27. Evolución del criterio de rotura de las fibras en la simulación numérica de los ensayos de tipo 2: a)  $t=0,9$  ms, b)  $t=1,8$  ms, c)  $t=2,7$  ms, d)  $t=3,6$  ms.

Atendiendo a la similitud de los resultados, tabla 4.5, se puede suponer que este fenómeno es similar al proceso que tiene lugar en los ensayos experimentales. Durante el ensayo se produce un daño progresivo por la rotura de algunas fibras, que va degradando las propiedades mecánicas de la probeta, hasta que se produce la rotura de la primera lámina e, inmediatamente, la rotura total de la probeta. Sin embargo, es más difícil obtener evidencias experimentales para confirmar este punto que en el caso de las simulaciones, únicamente se han obtenido algunas imágenes de fibras rotas antes de la rotura, figura 4.28.

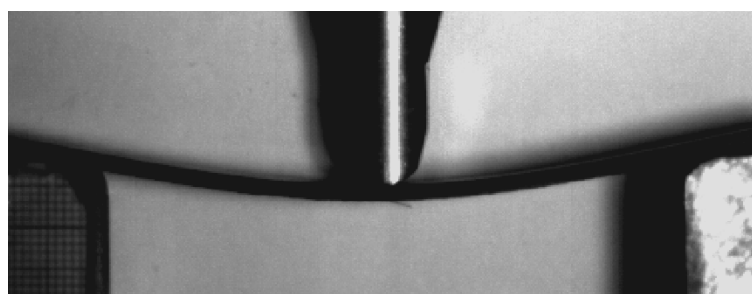


Figura 4.28. Rotura de fibras en la cara inferior de la probeta antes de la rotura de la misma.

Por otro lado, dado que el modelo de comportamiento mecánico empleado en el percutor y los apoyos es elástico lineal se ha verificado que no se sobrepasa el límite elástico calculando las tensiones máximas en estos elementos.

	Ensayos tipo 1 $E_{imp}=20 \text{ J}$ , $L=50 \text{ mm}$	Ensayos tipo 2 $E_{imp}=20 \text{ J}$ , $L=80 \text{ mm}$	Ensayos tipo 3 $E_{imp}=30 \text{ J}$ , $L=80 \text{ mm}$
Tensión de Von Mises máxima en apoyos y percutor	83 MPa	61 MPa	686 MPa

Tabla 4.6. Tensiones máximas en el modelo numérico de los apoyos y del percutor.

En todos los ensayos aparecen tensiones en el percutor muy superiores a las de los apoyos, siendo en todos los casos muy inferiores al límite elástico, 360 MPa.

## 4.5. Influencia de la energía de impacto en los resultados del ensayo de flexión dinámica

Una vez validado el modelo numérico, éste se ha empleado para profundizar en el estudio de los ensayos de flexión dinámica en torre de caída, en concreto, se ha analizado la influencia de la energía de impacto en los resultados del ensayo. Se han realizado ensayos con diferente distancia entre apoyos y se ha analizado como evolucionan los resultados en función de la energía de impacto. Se ha considerado que las propiedades mecánicas del material no dependen de la velocidad de deformación, por lo que las diferencias en los resultados se deben únicamente a la influencia de las fuerzas inerciales.

### 4.5.1. Planteamiento del estudio

En este estudio se ha considerado un rango de energías de impacto desde 2 J, un valor para el que no se produce la rotura de la probeta, hasta 200J, energía para la cual se espera que se produzca un gran nivel de ruido en el registro de fuerza-tiempo e incluso la separación entre el percutor y la probeta. Se han utilizado dos modelos numéricos, diferenciándose en la geometría de la probeta y la distancia entre apoyos, de esta forma se ha introducido la influencia de la geometría de la probeta en los resultados del ensayo.

➤ Primer modelo numérico

- Geometría de probeta: 80x20x2 mm<sup>3</sup>
- Distancia entre apoyos: 50 mm
- Relación L/h: 25

➤ Segundo modelo numérico

- Geometría de probeta: 105x20x2 mm<sup>3</sup>
- Distancia entre apoyos: 80 mm
- Relación L/h: 40

### 4.5.2. Resultados del estudio

Se han realizado las simulaciones del ensayo de flexión dinámica con los dos modelos y se han analizado los resultados en función de la energía de impacto. Cuando la energía de impacto es muy pequeña, no se produce la rotura de la probeta y, por tanto no se puede calcular la resistencia mecánica a flexión del laminado. Cuando la energía de impacto es muy grande, aparecen dos fenómenos que invalidan los resultados, por un lado, el ruido presente en el registro fuerza-tiempo puede tener tal amplitud que enmascare la propia señal impidiendo la obtención de resultados, por otra parte, puede producirse una separación entre el

percutor y la probeta que invalide el ensayo. Atendiendo a estos criterios, se ha establecido un rango de energías para cada modelo dentro del cual se pueden considerar válidos los resultados del ensayo, tabla 4.7, entendiendo que se pretende realizar un ensayo de flexión en tres puntos, con contacto permanente de la probeta con el percutor y los apoyos, en el que se produzca la rotura de la probeta y se obtenga un registro fuerza-tiempo con un nivel de ruido razonable.

	$E_{imp}$ mínima (J)	$E_{imp}$ máxima (J)
L=80 mm	20	60
L=50 mm	10	100

Tabla 4.7. Rango de energías de impacto válidas para el ensayo de flexión dinámica.

Acortando la distancia entre apoyos se puede aumentar el rango de energías de impacto y realizar ensayos a una velocidad de deformación mayor. En este caso, con una distancia entre apoyos de 80 mm se pueden realizar ensayos en los que la velocidad de deformación máxima varía entre  $5 \text{ s}^{-1}$  y  $10 \text{ s}^{-1}$  aproximadamente, mientras que si se emplea una distancia entre apoyos menor, 50 mm, la velocidad de deformación aumenta y se puede variar entre  $10 \text{ s}^{-1}$  y  $35 \text{ s}^{-1}$  aproximadamente.

En la siguiente figura se muestra como evoluciona la fuerza ejercida por el percutor sobre la probeta y la que ejerce ésta sobre los apoyos, para diferentes energías de impacto, con una distancia entre apoyos de 80 mm.

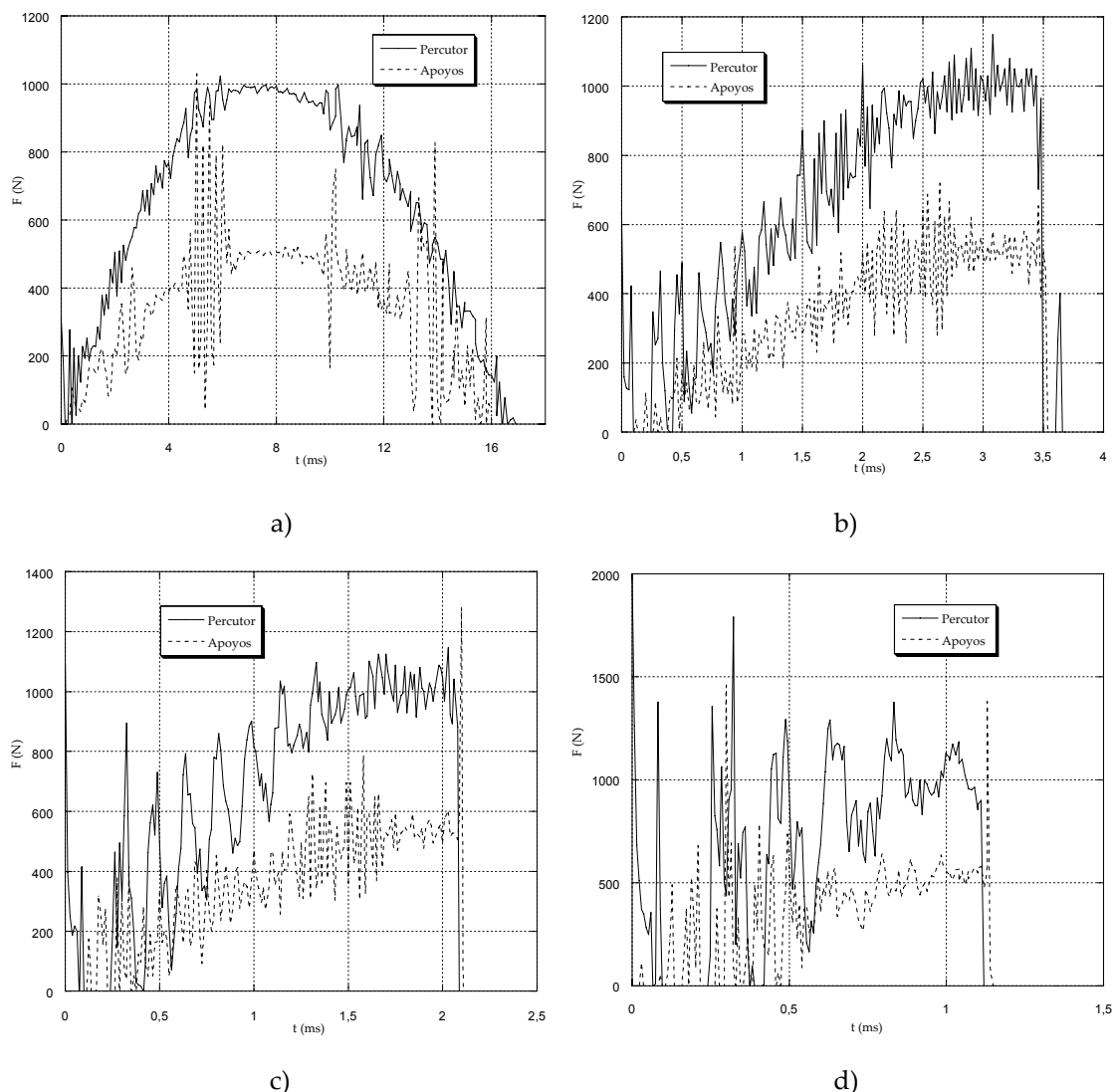


Figura 4.29. Fuerza ejercida por el percutor sobre la probeta, distancia entre apoyos de 80mm: a)  $E_{imp}=5$  J, b)  $E_{imp}=20$  J, c)  $E_{imp}=60$  J, d)  $E_{imp}=200$  J.

La evolución del registro de la fuerza ejercida por el percutor sobre la probeta para la menor energía, 5 J, (figura 4.29a) es característica de un ensayo en el que no se produce la rotura, el descenso del valor de la fuerza es suave porque la probeta resiste el impacto. La mínima energía de impacto dentro del rango válido es de 20 J, figura 4.29b, en este caso la fuerza ejercida por el percutor crece hasta alcanzar un máximo a partir del cual la fuerza cae bruscamente. El valor máximo del rango válido es de 60 J, figura 4.29c, comparando esta figura con la anterior, se aprecia como un aumento de la energía de impacto disminuye el tiempo de duración del ensayo y aumenta el ruido de la señal, sin embargo, los resultados son idénticos en

cuanto a la resistencia mecánica y al módulo aparente a flexión. Cuando la energía de impacto supera el máximo valor del rango válido, figura 4.29d, se produce una separación entre el percutor y la probeta durante el impacto, figura 4.30, de modo que no se puede considerar que los desplazamientos del percutor y de la probeta sean iguales. Además, la amplitud del ruido en el registro fuerza-tiempo es mayor que la propia señal, desvirtuando los resultados.

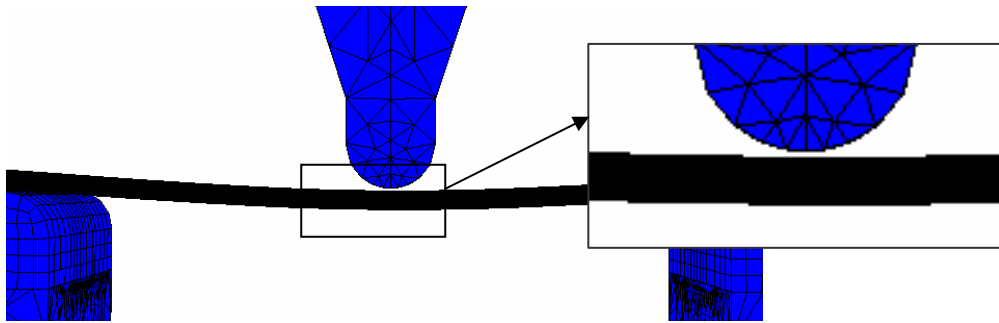


Figura 4.30. Separación entre percutor y probeta en la simulación numérica de un ensayo con energía de impacto de 200 J y distancia entre apoyos de 80mm.

La fuerza ejercida por la probeta sobre los apoyos sigue la misma evolución que la ejercida por el percutor, para la mayor energía de impacto, 200 J, el registro de fuerza desciende a cero en algunos momentos, indicando una separación entre la probeta y los apoyos, figura 4.29d.

El desplazamiento vertical máximo observado en las simulaciones de los ensayos también varía con la energía de impacto como se observa en la siguiente figura.

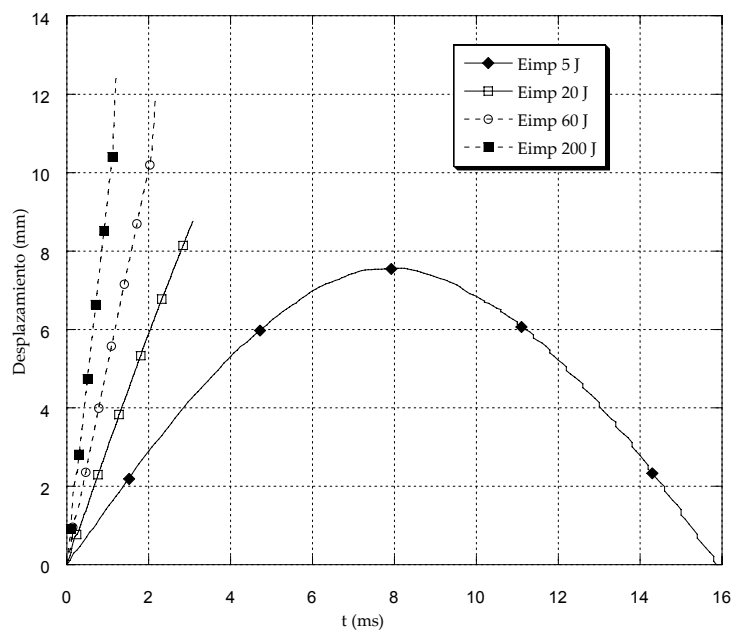


Figura 4.31. Desplazamiento vertical máximo obtenido en la simulación numérica de ensayos con diferentes energías de impacto, distancia entre apoyos de 80mm.

El desplazamiento vertical máximo aumenta con la energía de impacto. En todos los casos en los que se produce la rotura del laminado, es necesario emplear la formulación de grandes desplazamientos para el cálculo de la resistencia mecánica a flexión, ecuación 4.10.

Cuando la energía de impacto cambia, también lo hace la frecuencia propia del ruido presente en las señales de fuerza-tiempo, figura 4.32. En la siguiente figura, están representadas las primeras frecuencias propias de las señales de fuerza-tiempo, en función de la energía de impacto.

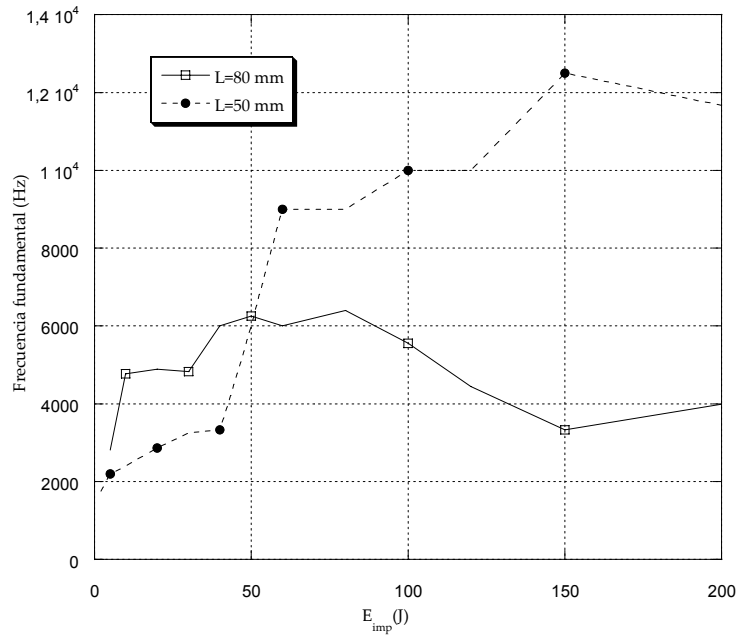


Figura 4.32. Primera frecuencia propia de las señales fuerza-tiempo en los ensayo de flexión dinámica virtuales.

Dependiendo de la energía de impacto y de la rigidez que opone la probeta se excitan unas frecuencias propias u otras en el percutor, de forma que varía el valor de la frecuencia propia predominante en el ruido presente en el registro fuerza-tiempo. No se puede determinar, a priori, la frecuencia propia del percutor que puede aparece en registro fuerza-tiempo, aunque la energía de impacto esté dentro del rango que se ha considerado válido.



En la siguiente figura se muestran la resistencia mecánica a flexión y el módulo aparente a flexión en función de la energía de impacto.

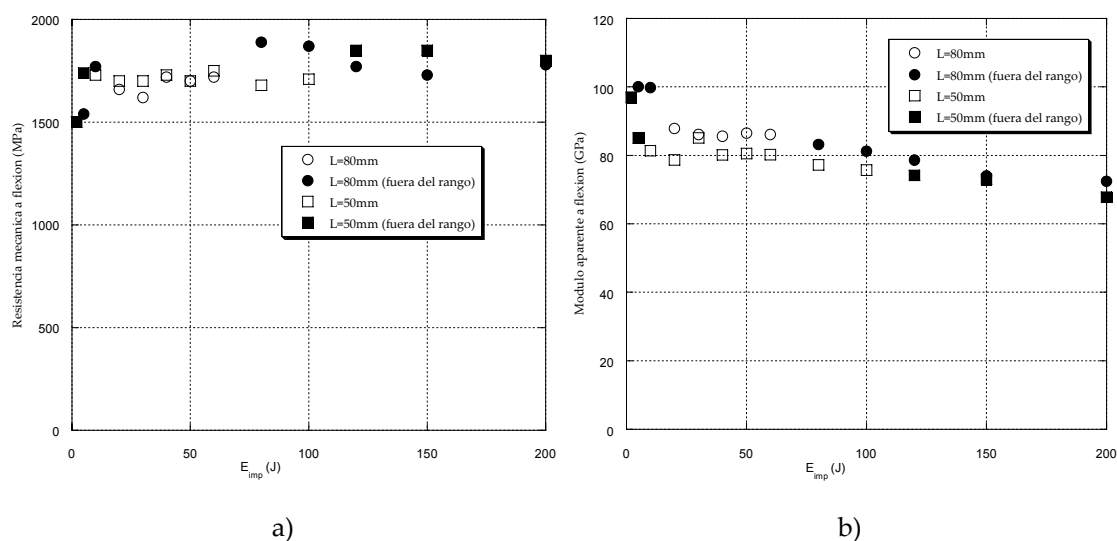


Figura 4.33. Variación de las propiedades mecánicas en función de la energía de impacto: a) resistencia mecánica a flexión, b) módulo aparente a flexión.

Cuando la energía de impacto está dentro del rango válido, los resultados obtenidos para la resistencia mecánica a flexión y el módulo aparente se mantienen constantes, es decir, no dependen de la energía de impacto. Sin embargo, cuando la energía de impacto está fuera del rango válido, los resultados pueden cambiar significativamente. Para energías de impacto muy pequeñas, el módulo aparente a flexión aumenta, llegando a ser un 18% superior para una energía de impacto de 5 J con una distancia entre apoyos de 80 mm, mientras que, con energías de impacto muy elevadas disminuye, tomando valores de hasta un 19% inferior para una energía de impacto de 200 J con una distancia entre apoyos de 50 mm. Por otro lado, la resistencia mecánica a flexión aumenta cuando la energía de impacto es muy alta, para una energía de impacto de 200 J es un 15% superior con una distancia entre apoyos de 80 mm y un 16% mayor cuando la distancia entre apoyos es de 50 mm.

En el modelo numérico no se tiene en cuenta la variación de las propiedades mecánicas del laminado con la velocidad de deformación, de forma que estas

diferencias se deben únicamente a efectos inerciales. Si se pretende realizar un estudio experimental, para analizar la variación de las propiedades mecánicas de un material con la velocidad de deformación, habría que descontar estos efectos inerciales que pueden distorsionar los resultados.

## **CAPÍTULO 5**

# **TOLERANCIA AL DAÑO A FLEXIÓN**

### **5.1. Introducción**

Dentro de los posibles impactos que puede sufrir una estructura, se pueden distinguir dos tipos. Un primer tipo de impacto corresponde al impacto de un objeto ajeno a la estructura, por ejemplo, la caída de una herramienta durante una operación de mantenimiento o montaje, figura 5.1a. Este tipo de impacto es el más estudiado en la bibliografía (Abrate, 1998), en el caso de vigas sometidas a flexión, la mayoría de los autores realizan impactos sobre placas, para posteriormente cortar esas placas dañadas dándoles forma de viga (Kim et al., 1993; Amaro et al. 2006). En esta tesis se han estudiado las propiedades residuales de los laminados tras este tipo de impacto, generando el daño mediante un percutor de punta semiesférica pero, en lugar de impactar sobre una placa, los ensayos se han realizado directamente sobre una viga biapoyada. Esta opción evita cortar el laminado y, por tanto, introducir un daño adicional en el proceso de corte.

El otro tipo de impacto que se puede producir, ocurre cuando una colisión de la estructura o un fallo interno provoca un impacto entre dos de sus componentes,

estos impactos suelen provocar sobre los componentes estructurales una carga impulsiva del mismo tipo que las cargas estáticas que soportan en condiciones normales de servicio. Por ejemplo, en condiciones normales, un manillar de bicicleta soporta una carga estática de flexión, producida por el peso transmitido por los brazos del ciclista y la reacción del punto de unión con el cuadro, en el caso de una colisión de la bicicleta, el impacto se transmitirá a través de sus componentes convirtiendo la reacción del cuadro sobre el manillar en una carga impulsiva que puede provocar su rotura, figura 5.1b. En esta tesis también se han estudiado las propiedades residuales de los laminados tras este segundo tipo de impacto, situación que está menos estudiada. Para generar este tipo de daño, se han empleado probetas tipo viga biapoyadas que han sido impactadas por un percutor de punta tipo Charpy, esta configuración corresponde al ensayo de flexión en tres puntos. Tras ambos tipos de impacto la estructura debe soportar las cargas habituales para mantener su integridad por lo que se han estudiado las propiedades residuales a flexión.



Figura 5.1. Ejemplos de impactos sobre estructuras: a) caída de una herramienta en una operación de montaje, b) rotura de manillar por colisión de la bicicleta.

## 5.2. Procedimiento experimental

El material con el que se han fabricado las vigas es un tejido de fibra de vidrio en matriz poliéster. Sobre estas vigas se han realizado dos tipos de ensayos de generación de daño, correspondientes a dos tipos de impactos que puede sufrir una viga. Ambos han sido llevados a cabo en la torre de caída de peso instrumentada descrita en el capítulo anterior. El daño generado en estos impactos ha sido evaluado mediante inspección por ultrasonidos, para ello se ha empleado un equipo automatizado con representación en C-Scan. Se ha estimado el daño de una forma cuantitativa calculando el área dañada en cada probeta y se han evaluado tanto la resistencia mecánica como el módulo aparente residual a flexión en condiciones estáticas en la configuración de flexión en tres puntos.

### 5.2.1. Material empleado

En este estudio se ha empleado un laminado constituido por un tejido de fibra de vidrio-E en matriz poliéster. Estos laminados son menos frágiles que los de fibra de carbono, en los primeros la pérdida de propiedades residuales se produce de forma progresiva, mientras que en los últimos aparece de forma brusca, es decir, si la energía de impacto es superior a la energía umbral se produce la rotura completa, mientras que si es inferior no existe daño en el laminado (Rotem, 1988), por ello los laminados de fibra de vidrio son más adecuados para abordar un estudio de la tolerancia al daño. Este hecho fue contratado en esta tesis doctoral comprobando que, efectivamente, los laminados de fibra de carbono utilizados en el capítulo anterior no conservan propiedades residuales tras el impacto a no ser que no sufran ningún tipo de daño.

El laminado está constituido por cinco láminas de tejido equilibrado (tafetán) y fue fabricado por la empresa *Sistemas y Procesos Avanzados* en placas de 500x500 mm<sup>2</sup>

con un espesor de 3 mm. Es un tipo de material muy empleado en diversas industrias, como la automovilística o la naval, porque tiene una muy buena relación entre propiedades mecánicas y precio.

La fibra de vidrio empleada (RT 270 1546) fue fabricada por *Saint-Gobain Vetrotex*, este tipo de refuerzo es altamente compatible con una amplia variedad de resinas, presenta una buena estabilidad dimensional y unas excelentes propiedades mecánicas. La matriz utilizada fue una resina de tipo poliéster AROPOL FS6902, fabricada por la empresa *Ashland*. Esta resina se caracteriza por presentar una buena flexibilidad, lo que la convierte en una matriz idónea en la preparación de laminados que van a estar sometidos a esfuerzos mecánicos. Además, su óptima mojabilidad permite una unión perfecta con los refuerzos de fibra.

### 5.2.2. Generación de daño

En este estudio se han realizado dos tipos de ensayos de generación de daño para simular los dos tipos de impacto diferente. En ambos casos se han empleado probetas tipo viga simplemente apoyadas y se ha realizado un impacto sobre su sección central, la diferencia entre los dos tipos de impacto está en el percutor empleado para generar el daño y en la geometría de la probeta.

En el primer tipo de ensayo, Ensayo de Impacto con percutor tipo Charpy, que se ha codificado como ensayo EICH, se ha generado el daño mediante un ensayo de flexión en tres puntos, correspondiendo a un impacto producido por el mismo tipo de carga que soporta una viga durante las condiciones normales de servicio. Se ha empleado un percutor con cabeza tipo Charpy de 3,86 kg de peso, figura 5.2a, con el que se aplica la carga sobre todo el ancho de la probeta.

En el segundo tipo de ensayo, Ensayo de Impacto con percutor de punta Semiesférica, codificado como ensayo EISe, las probetas se han colocado también biapoyadas en sus extremos, sin embargo, para generar el daño se ha empleado un

percutor de punta semiesférica de 3,62 kg de peso, figura 5.2b, utilizado para realizar impactos sobre placas. En estos ensayos, la carga no se aplica sobre todo el ancho de la probeta, sino únicamente sobre su punto medio. Este segundo tipo de ensayos correspondería al impacto producido por cualquier objeto ajeno a la viga, manteniendo ésta su posición habitual de trabajo.

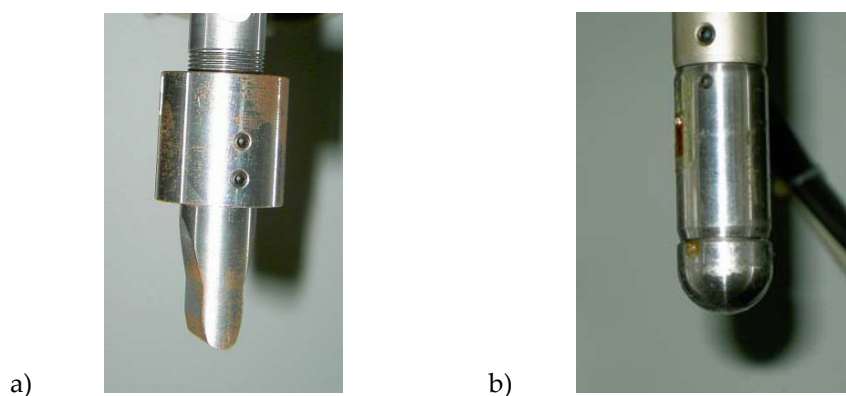


Figura 5.2. a) extremo del percutor de punta tipo Charpy, b) extremo del percutor de punta semiesférica.

En estos ensayos se ha utilizado la torre de caída y las técnicas de medida descritas en el capítulo anterior. Se ha empleado un tipo de probeta diferente para cada tipo de ensayo, con el percutor de punta semiesférica se han empleado probetas más anchas para que el daño en los impactos de menor energía no se extendiese por todo el ancho de la probeta. Se han realizado varias series de ensayos con energías de impacto distintas, las energías de impacto inferiores corresponden la energía mínima para la cual se genera algún tipo de daño durante el impacto, mientras que el valor superior está determinado por la máxima energía que no produce la rotura completa del laminado.

Para diseñar el tamaño de las probetas, se han utilizado los resultados del estudio de la influencia de las tensiones de cortadura interlaminar presentado en el capítulo 3, apartado 3.2. El material empleado es un laminado anisótropo, con una relación entre la rigidez aparente a flexión y a cortadura interlaminar no muy grande,  $E_{xx}^b/G_{xz}=7$ . Para este laminado, la influencia de las tensiones de cortadura interlaminar en el cálculo de los desplazamientos, se puede despreciar cuando la

esbeltez de la probeta ( $L/h$ ) sea superior a 16, figura 3.6. Se ha seleccionado una relación  $L/h=30$ , para asegurar que no se produce ningún tipo de daño debido a las tensiones de cortadura interlaminar. Estos valores de esbeltez, se refieren a la relación entre la distancia entre apoyos y el espesor del laminado, la longitud de las probetas debe ser ligeramente superior a la distancia entre apoyos.

- Ensayos de generación de daño mediante impactos con percutor tipo Charpy, ensayos EICH.
  - Geometría de probeta: 120x20x3 mm<sup>3</sup>
  - Distancia entre apoyos: 90 mm
  - Percutor tipo Charpy, radio de la punta 5 mm
  - Energías de impacto: 8 J - 11 J - 14 J
  
- Ensayos de generación de daño mediante impactos con percutor de punta semiesférica, ensayos EISe
  - Geometría de probeta: 120x50x3 mm<sup>3</sup>
  - Distancia entre apoyos: 90 mm
  - Percutor de punta semiesférica de diámetro 20 mm
  - Energías de impacto: 10 J - 12,5 J - 15 J - 17,5 J - 20 J

Se ha seguido el procedimiento experimental descrito en el estudio de la rotura dinámica de vigas, en este caso la medida más importante es la energía absorbida por la probeta durante el impacto puesto que el daño producido en el laminado depende en gran medida de esta energía absorbida.



La curva energía-tiempo representada en la siguiente figura es representativa de un ensayo en el que no se produce la rotura total de la probeta:

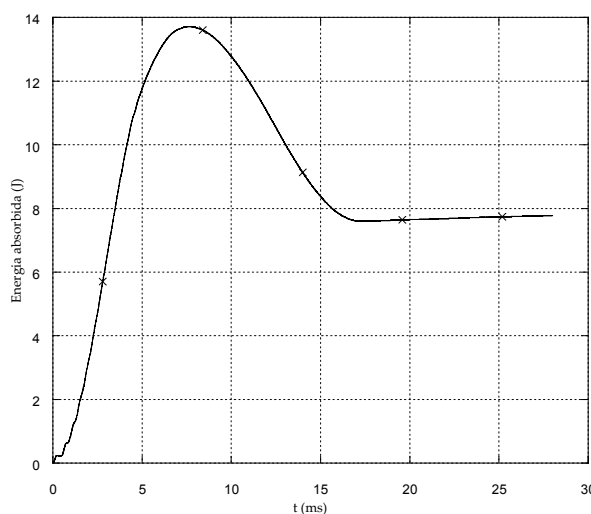


Figura 5.3. Curva energía-tiempo un ensayo de impacto sobre una probeta de flexión en torre de caída. Energía de impacto teórica 15 J.

Para tiempos pequeños la energía absorbida por la probeta aumenta rápidamente hasta alcanzar el valor de la energía de impacto, que es algo inferior al teórico ya que durante la caída el percutor pierde velocidad por rozamientos con las guías verticales, en el caso representado en la figura 5.3 es un 8,3% menor. Una vez alcanzado el máximo, el valor de la energía absorbida desciende mientras la probeta devuelve la energía elástica acumulada al percutor, que inicia un movimiento ascendente. Finalmente, cuando la probeta recupera su forma inicial, el valor de la energía absorbida se estabiliza en el valor correspondiente a la energía absorbida mediante los diferentes mecanismos de daño. Cuanta más energía absorba la probeta mayor será el daño producido y, por tanto, mayor será la pérdida de propiedades residuales. Si se produce la rotura total de la probeta no hay recuperación de la forma y, por tanto, no desciende la energía absorbida, este tipo de curva se muestra en el capítulo 4, figura 4.16.

### 5.2.3. Evaluación del daño

Para estimar el daño que los ensayos de impacto han producido en las probetas y poder realizar posteriormente una evaluación de sus propiedades residuales, se ha empleado una técnica de inspección no destructiva. Se ha utilizado un sistema automático de inspección por ultrasonidos, mediante análisis por pulso-eco, con presentación en C-Scan, que permite una evaluación cuantitativa de la superficie dañada.

#### Equipo empleado

El equipo empleado, figura 5.4, que permite una evaluación automatizada de la superficie dañada en las probetas consta de los siguientes componentes:

- Cuba de inmersión: tiene unas dimensiones útiles de 135x1120x600 mm<sup>3</sup>, dentro de la misma se encuentra una placa reflectora y unos cilindros de metacrilato sobre los que se posicionan las probetas.
- Palpador: se ha empleado un palpador fabricado por *Sonatest* de tipo monocristal de haz recto con una frecuencia de 1 MHz. Tiene una lámina de epoxy en su cara exterior para facilitar el acoplamiento acústico con el agua.
- Equipo mecánico: el palpador se desplaza sobre la superficie de la cuba mediante dos ejes motorizados con tracción de cremallera movidos por unos motores paso a paso. El sistema tiene una precisión máxima de 0,1 mm.
- Equipo de adquisición de datos: el equipo incluye un PC con una tarjeta para la adquisición de datos de ultrasonidos de altas prestaciones para PC Socomate USPC 3100 PCI.
- Software: se ha empleado el software *VisualScan* desarrollado por *Tecnitest* que permite controlar todos los aspectos de la inspección: la configuración

de la señal, el tipo de análisis, el movimiento del palpador y el cálculo del área dañada.



Figura 5.4. Equipo automatizado de inspección por ultrasonidos con presentación en C-Scan.

### Metodología de evaluación de daño

Para evaluar el daño en las probetas se ha empleado una variante del análisis por pulso-eco para probetas de pequeño espesor. Este tipo de análisis estudia el eco reflejado en la placa reflectora situada en el fondo de la cuba.

En la siguiente figura se muestran las señales obtenidas por el equipo de ultrasonidos cuando se inspecciona un punto en el que no existe ningún obstáculo entre el palpador y la placa reflectora. Se aprecian dos señales principales, la que está situada junto al origen es la señal del propio transductor, mientras que la señal situada en la parte derecha de la figura corresponde con la señal reflejada en la placa reflectora.

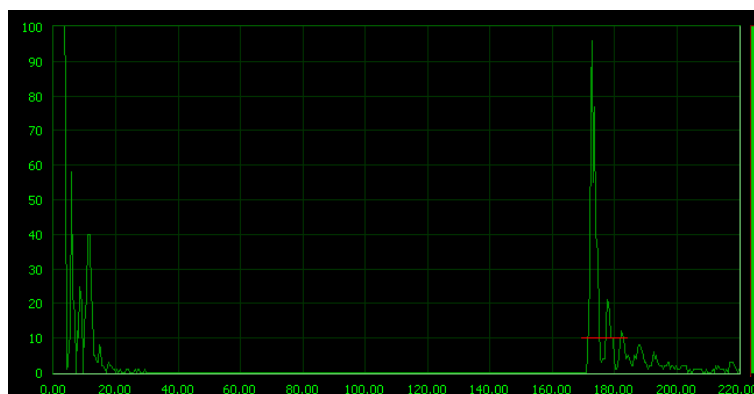


Figura 5.5. Señal recibida por el sistema de inspección por ultrasonidos sin probeta.

Cuando una probeta sin daño se interpone entre el palpador y la placa reflectora, la señal reflejada por la placa se ve claramente atenuada, figura 5.6. La línea roja horizontal situada sobre esta señal se denomina puerta, y marca el nivel mínimo de amplitud para el que se considera que no hay daño. Además, en la parte central aparece otra señal de mayor amplitud, que es la reflejada por la propia probeta.

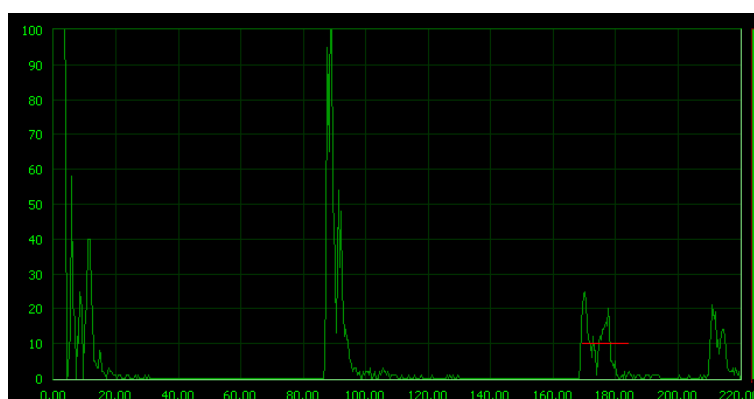


Figura 5.6. Señal recibida por sistema de inspección por ultrasonidos con una probeta sin dañar.

Si la probeta tiene un cierto daño la señal reflejada por la placa se atenúa aún más, figura 5.7, haciendo que la amplitud sea inferior al nivel de la puerta, de esta forma se puede estimar el nivel de daño en función de la atenuación de la señal reflejada en la placa reflectora.

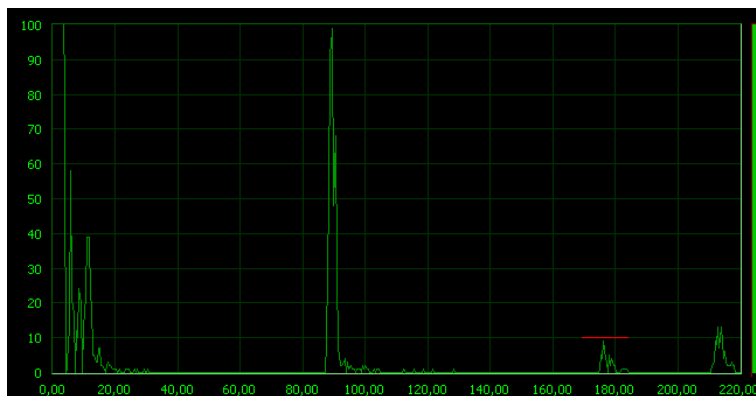


Figura 5.7. Señal recibida por el sistema de inspección por ultrasonidos con una probeta dañada.

Una vez realizado un barrido por toda la probeta se pueden apreciar diferentes niveles de atenuación en su superficie, figura 5.8, que corresponden al daño producido en el impacto, defectos en el material o la presencia de algún objeto, como los cilindros de metacrilato sobre los que se apoya la probeta.

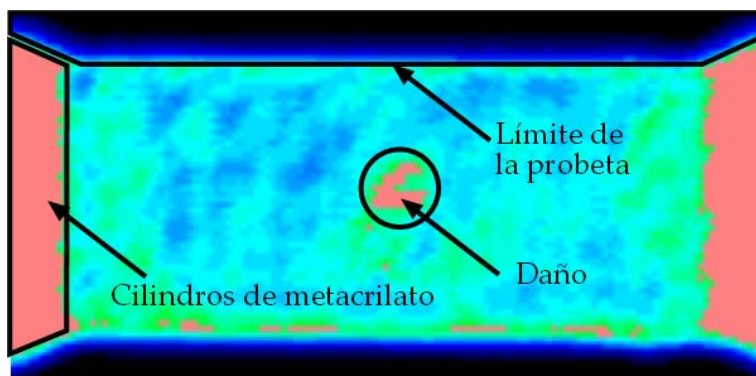


Figura 5.8. Imagen proporcionada por el equipo de C-Scan. Probeta dañada en un ensayo de generación de daño tipo B con una energía de impacto de 12,5 Julios.

Los colores más cálidos indican mayor nivel de atenuación, mientras los fríos muestran mayor amplitud en la señal. En esta probeta el daño se encuentra localizado en el centro de la imagen coincidiendo con la zona de contacto con el percutor de punta semiesférica. La superficie roja situada en los extremos izquierdo y derecho de la imagen es debida a los cilindros de metacrilato donde se apoya la probeta, la imagen negra de los extremos inferior y superior de la imagen corresponden a zonas donde no hay probeta.

### 5.2.4. Resistencia residual a flexión

Una vez estimado el daño introducido en cada una de las probetas se ha procedido a evaluar las propiedades residuales a flexión, calculando tanto la resistencia mecánica como el módulo aparente de cada una de las probetas dañadas.

Para evaluar las propiedades residuales a flexión se han realizado ensayos de flexión estática en tres puntos siguiendo el procedimiento recomendado por la norma para ensayos a flexión estática sobre materiales compuestos (ASTM D 790-98), dado que no existe norma para evaluar propiedades residuales a flexión.

#### Equipo empleado

Los ensayos se llevaron a cabo en una máquina universal de ensayos servohidráulica marca Instron, modelo 8516, de 100 kN de carga máxima, figura 5.9. Se sustituyó la célula de carga original por una de 5 kN dado que la carga de rotura esperada era pequeña.



Figura 5.9. Máquina universal de ensayos servohidráulica, Instron 8516.

Se empleó un útil de flexión en tres puntos que permitía realizar los ensayos sobre los dos tipos de probetas dañadas, figura 5.10. Siguiendo las recomendaciones de

la norma ASTM D 790-98, el útil consta de unos cilindros de 10 mm de diámetro situados en los apoyos para evitar tanto rozamientos como concentración de tensiones. El pistón encargado de la aplicación de la carga, consta de un cilindro idéntico al de los apoyos para aplicar la carga. El útil tiene una muesca en su base para facilitar un centrado correcto.

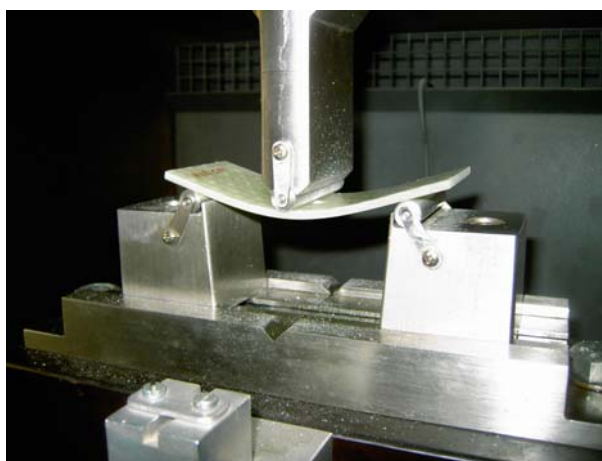


Figura 5.10. Ensayo de resistencia residual en la configuración de flexión en tres puntos en condiciones estáticas sobre una probeta sometida a impactos de generación de daño tipo B.

### Metodología de ensayo

Una vez colocada la probeta en el dispositivo de ensayo, simplemente apoyada sobre los cilindros, se aplica la carga el pistón sobre la sección central de la probeta con una velocidad de deformación de  $0,01 \text{ min}^{-1}$ . Para estimar la velocidad de desplazamiento del pistón se ha empleado la formulación de la teoría de Resistencia de Materiales Isótropos para pequeños desplazamientos tal como indica la norma ASTM D 790-98.

$$v = \frac{L^2}{6 \cdot h} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (5.1)$$

donde  $v$  es la velocidad del pistón ( $4,5 \text{ mm/min}$ ),  $h$  el espesor de la probeta,  $L$  la distancia entre apoyos y  $\frac{d\varepsilon}{dt}$  la velocidad de deformación de la fibra exterior ( $0,01 \text{ min}^{-1}$ ).

### Datos obtenidos del ensayo

En cada instante de tiempo se registra la fuerza ejercida sobre la probeta y el desplazamiento de la cabeza del pistón. Para estimar con precisión el desplazamiento de la sección media de la probeta se pueden emplear bandas extensométricas o un transductor de desplazamiento tipo LVDT. Ambas soluciones presentan inconvenientes cuando se aplican a materiales compuestos de tipo laminado debido a que toman registros en la cara inferior de la probeta. En dicha zona las tensiones de tracción son máximas y es donde se produce el arranque de las fibras, este fenómeno puede impedir las mediciones o distorsionar los resultados. Por otro lado, debido a su pequeño espesor la rigidez que presentan estas probetas es despreciable respecto de la rigidez del pistón de aplicación de la carga, por lo que se ha empleado la medida del desplazamiento del pistón para el cálculo de la resistencia y la rigidez residual.

A partir de la curva fuerza-desplazamiento registrada, figura 5.11, se pueden determinar la resistencia y la rigidez aparente a flexión. La curva fuerza-desplazamiento en estos ensayos es aproximadamente lineal hasta rotura, además, la rotura se produce en diferentes fases ya que la rotura de las láminas es progresiva. Para el cálculo del módulo aparente y de la resistencia mecánica a flexión se ha empleado la formulación descrita en el capítulo anterior, teniendo en cuenta la formulación de grandes desplazamientos, ecuaciones 4.10 y 4.11, dado que el desplazamiento vertical máximo es superior al 10% de la distancia entre apoyos.



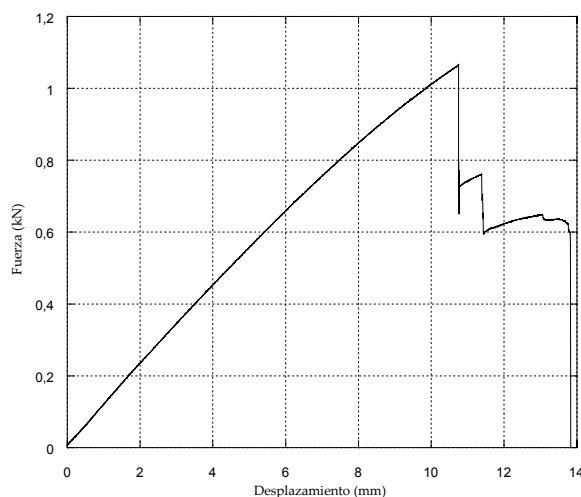


Figura 5.11. Registro fuerza-desplazamiento en un ensayo de flexión en tres puntos estático sobre una probeta de tipo A.

### Ensayos realizados

Para estudiar las propiedades residuales de las probetas impactadas es necesario conocer en primer lugar las propiedades de éstas cuando no están dañadas, para lo que se han realizado unos ensayos de referencia. Se ha realizado dos series de siete ensayos de flexión estática en tres puntos, correspondientes a los dos tipos de probeta empleados.

- Ensayos de referencia tipo EICH
  - Geometría de probeta:  $120 \times 20 \times 3 \text{ mm}^3$
  - Distancia entre apoyos: 90 mm
  
- Ensayos de referencia tipo EISE
  - Geometría de probeta:  $120 \times 50 \times 3 \text{ mm}^3$
  - Distancia entre apoyos: 90 mm

## 5.3. Resultados

En primer lugar, se muestran los ensayos de generación de daño en los que se ha calculado la energía absorbida por las probetas en cada impacto. En segundo lugar, se presentan los resultados del estudio de evaluación del daño en el que se ha estimado el área dañada en cada probeta forma cuantitativa. Finalmente, se presentan los resultados de la evaluación de las propiedades residuales a flexión, donde se ha calculado tanto la resistencia mecánica como el módulo aparente residual a flexión.

### 5.3.1. Ensayos de generación de daño

Se ha realizado una serie de cinco ensayos para cada configuración y energía de impacto y se ha calculado la energía absorbida para cada uno de ellos.

En la siguiente figura se muestra la energía absorbida en función de la energía de impacto para cada ensayo. Al calcular la velocidad de impacto mediante la cámara de alta velocidad se obtiene un valor de energía de impacto inferior al teórico debido al rozamiento.

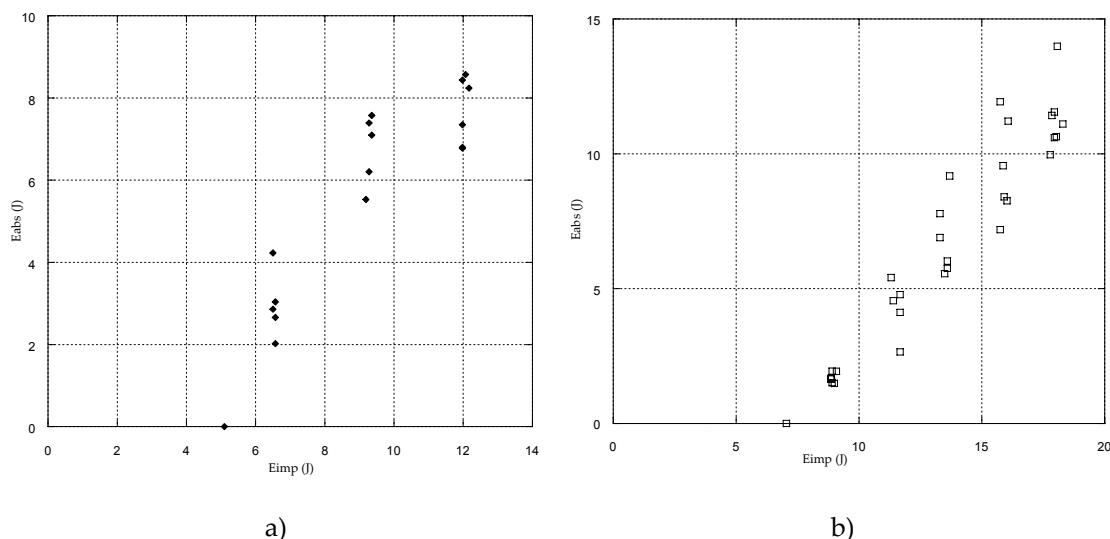


Figura 5.12. Energía absorbida frente a energía de impacto en los ensayos de generación de daño:  
a) ensayos tipo EICH, b) ensayos tipo EISE.

Se observa un comportamiento diferente en los dos tipos de ensayos realizados. En los ensayos tipo EICH, la energía absorbida crece muy rápidamente para energías de impacto bajas, pero al aumentar la energía de impacto, la pendiente disminuye. En los ensayos tipo EISE, en cambio, la energía absorbida crece con una pendiente prácticamente constante en todo el rango de energías de impacto considerado.

En este trabajo no se ha calculado la energía umbral por no ser objetivo de esta tesis, sin embargo, en los resultados se ha incluido una energía de impacto para la cual no se produce ningún daño en la probeta y, por tanto, no absorbe ninguna energía y permite estimar de forma aproximada un orden de magnitud para la energía umbral.

Otro dato significativo observable en las gráficas de la figura 5.12 es una gran dispersión de resultados, este dato es habitual en el cálculo de la energía absorbida, puesto que concurren varios mecanismos de daño complejos al mismo tiempo y una pequeña diferencia en alguna variable del ensayo puede provocar una gran variación en los resultados, sobretodo si se trabaja con laminados de

fibra de vidrio, en los que habitualmente la dispersión de resultados es bastante elevada, (Rotem, 1988; Mouritz, 1996; Zhang y Richardson, 2006).

Si se calcula la energía absorbida por unidad de superficie se pueden comparar los dos tipos de ensayos, figura 5.13.

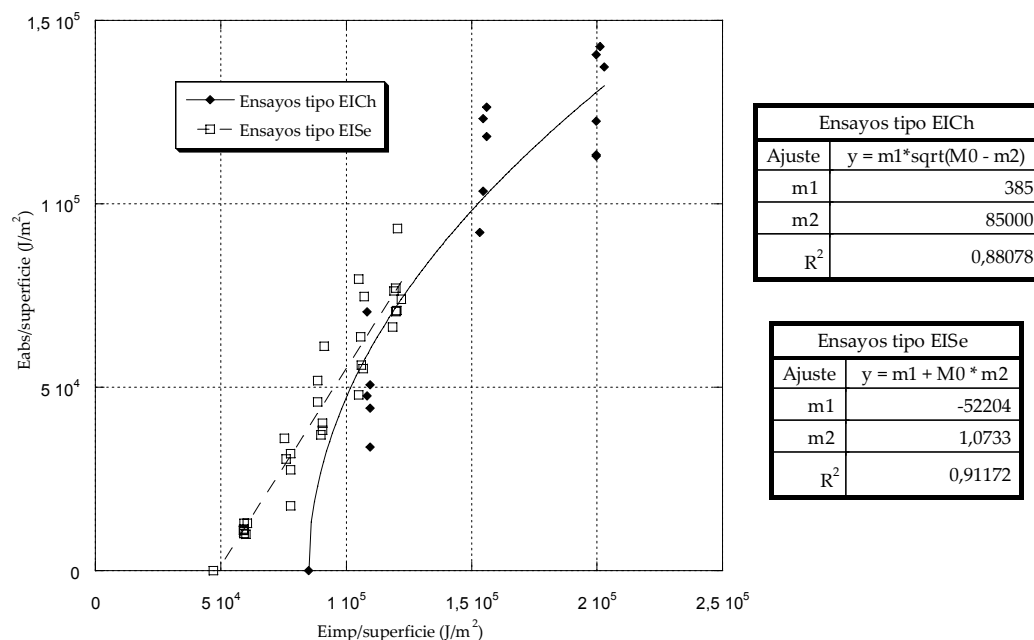


Figura 5.13. Energía absorbida por unidad de superficie frente a energía de impacto por unidad de superficie.

En los ensayos de tipo EICH las energías de impacto por unidad de superficie son mayores que en los de tipo EISE porque las probetas tienen una sección menor. Mientras en los ensayos tipo EISE se consigue un ajuste bastante bueno con una recta,  $R^2=0,91$ , en los ensayos tipo EICH es necesario recurrir a una raíz cuadrada para ajustar los resultados con precisión,  $R^2=0,88$ , ya que la pendiente con la que crece la energía absorbida es variable. Los valores del coeficiente de correlación no son muy elevados en ninguno de los dos tipos de ensayos porque existe una gran dispersión de resultados, entre un 10% y un 20% para cada energía de impacto teórica. A la vista de los resultados, no se puede concluir que en los dos tipos de ensayos las probetas absorban energía en la misma medida.

### 5.3.2. Evaluación del daño

Con el equipo de inspección por ultrasonidos con representación en C-Scan se han examinado todas las probetas ensayadas, también se han inspeccionado probetas sin dañar para comprobar que no tenían defectos internos apreciables.

#### Análisis cualitativo de la superficie dañada

En la siguiente figura se muestra el análisis realizado mediante C-Scan sobre una probeta sin ensayar y tres probetas ensayadas con el percutor tipo Charpy (ensayos tipo EICH) con energías diferentes.

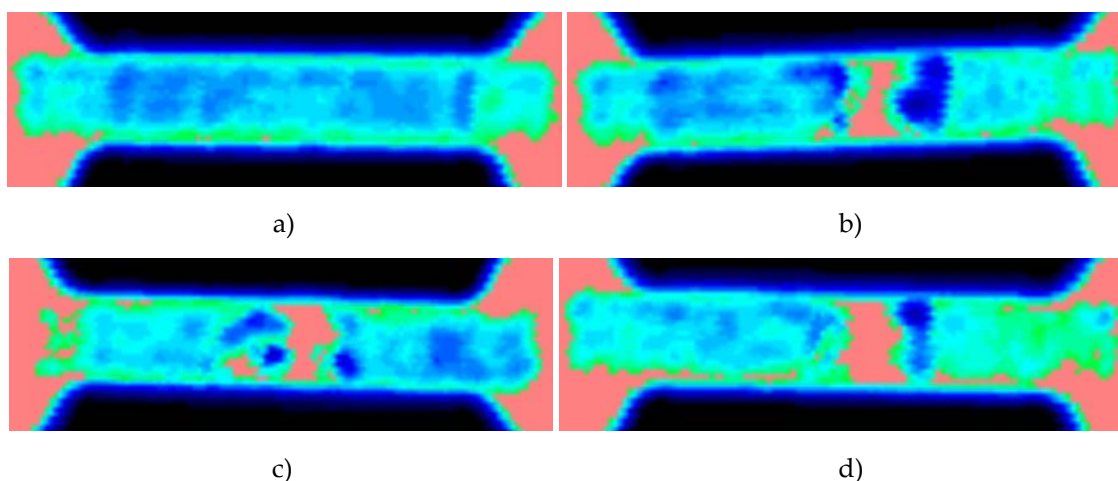


Figura 5.14. Imágenes de C-Scan para probetas dañadas en ensayos tipo EICH: a) sin dañar, b) 8 J, c) 11 J, d) 14 J.

En la probeta sin dañar se aprecia una cierta zona aparentemente dañada en uno de sus bordes, en esta zona la atenuación de la señal puede ser debida a la existencia de burbujas de aire en la cuba de inmersión o a daño producido en el laminado durante el proceso de corte.

El área dañada crece al aumentar la energía de impacto, sin embargo, dicho aumento de la superficie dañada cada vez es menor. El mayor crecimiento de daño se produce al pasar de 0 J a 8 J, en las probetas ensayadas con 8 J la superficie dañada abarca todo el ancho de la probeta, cuando se pasa de 8 J a 11 J, o de 11 J a 14 J, el aumento de área dañada es mucho menor. Para una energía de impacto de

8 J se produce una delaminación que abarca todo el ancho de la probeta, cuando se aumenta la energía de impacto tienen mayor influencia otros mecanismos de daño: en la cara inferior de la probeta aparece la rotura de fibras producida por las tensiones de tracción, mientras en la cara superior se produce la rotura de la matriz debida al aplastamiento producido por el contacto con el percutor. Sin embargo, la extensión superficial de estos mecanismos de daño es menor que la de la delaminación, por lo tanto el área dañada no aumenta significativamente.

La figura 5.15 muestra el análisis realizado mediante C-Scan sobre las probetas ensayadas con el percutor de punta semiesférica (ensayos EISe).

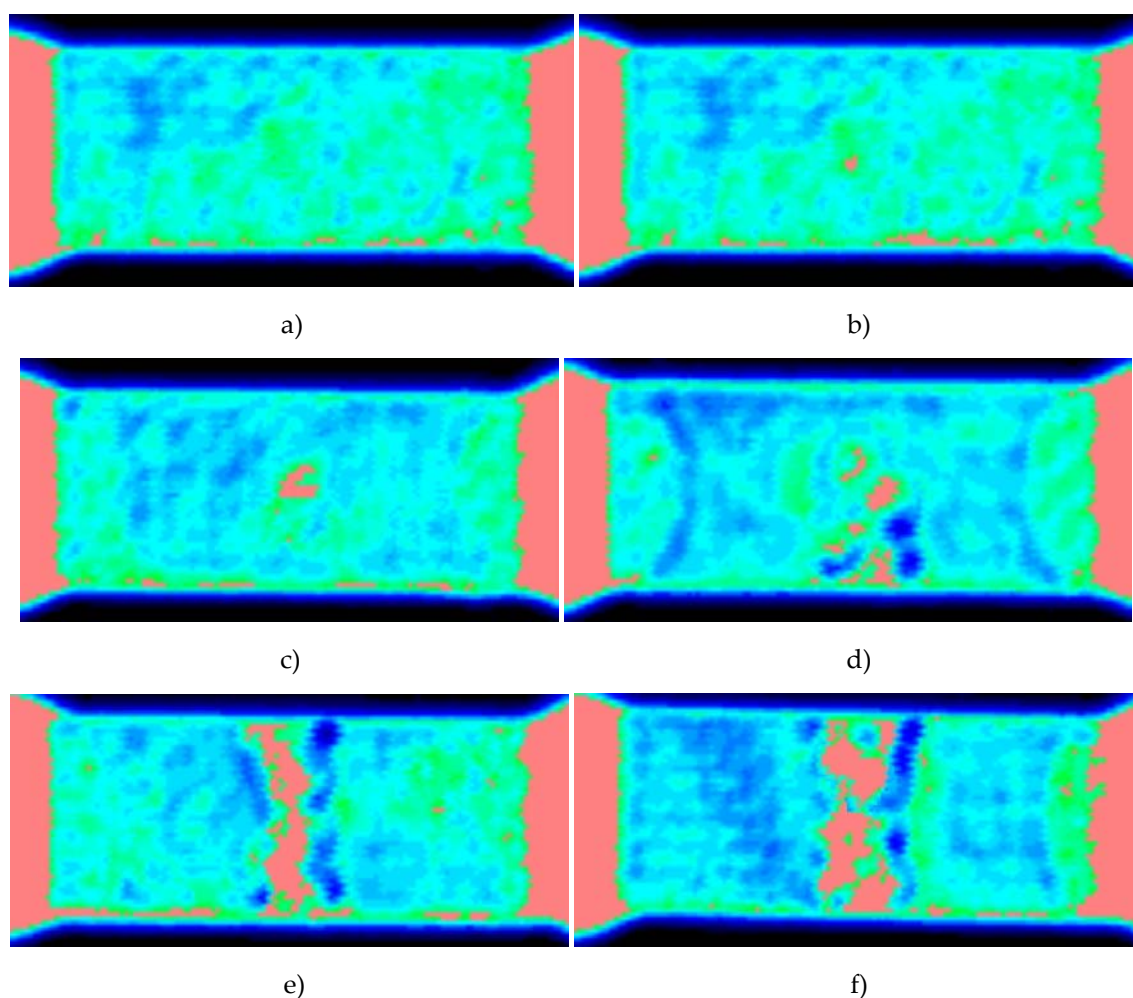


Figura 5.15. Imágenes de C-Scan para probetas dañadas en ensayos tipo EISe con diferentes energías de impacto: a) sin dañar, b) 10 J, c) 12,5 J, d) 15 J, e) 17,5 J, f) 20 J.

En estos ensayos la energía de impacto por unidad de superficie es mucho menor y se aprecia un aumento más gradual de la superficie dañada. En la figura 5.15b la energía de impacto es tan pequeña, 10 J, que apenas se observa una pequeña zona dañada en la zona de contacto con el percutor. En la figura 5.15c, energía de impacto de 12,5 J, la zona dañada por el contacto con el percutor es mucho mayor pero el daño todavía no se ha extendido demasiado.

En la figura 5.15d, 15 J, el daño está más extendido, una delaminación crece desde el centro de la probeta hacia uno de los extremos. Esta extensión del daño hacia uno de los laterales de la probeta no es casual, ni se debe a una posición no simétrica de la probeta durante el ensayo. Cuando la energía de impacto alcanza un cierto valor, comienzan a producirse delaminaciones en la probeta que tienden a crecer hacia zonas donde puede haber más defectos en el material. La existencia de defectos internos en el material también podría explicar la gran dispersión de resultados obtenida en el cálculo del área dañada.

En la figura 5.15e, 17,5 J, el área dañada se ha extendido por todo el ancho de la probeta, para ese valor de energía de impacto la delaminación alcanza los dos bordes laterales de la probeta. Esta energía de impacto por unidad de superficie coincide con la menor energía de los ensayos de tipo EICH, en los cuáles la delaminación también abarca todo el ancho de la probeta.

En la figura 5.15f, 20 J, el daño también ocupa toda la sección central de la probeta y no se aprecia un aumento significativo del área dañada aunque la energía absorbida sea mayor. Cuando la delaminación ha alcanzado los dos extremos de la probeta, tienen mayor influencia otros mecanismos de daño como la rotura de fibras o el aplastamiento de la matriz, estos mecanismos de daño no aumentan significativamente el área dañada aunque sean capaces de absorber más energía.

### Análisis cuantitativo de la superficie dañada

El equipo de inspección por ultrasonidos permite una evaluación cuantitativa del daño mediante la medición de la superficie dañada, la cual se ha llevado a cabo en todas las probetas ensayadas. De esta forma se ha analizado como evoluciona el área dañada en función de la energía del impacto y de la energía absorbida por la probeta.

En la siguiente figura se muestra el porcentaje de área dañada en cada probeta en función de la energía de impacto por unidad de superficie para los dos tipos de ensayo.

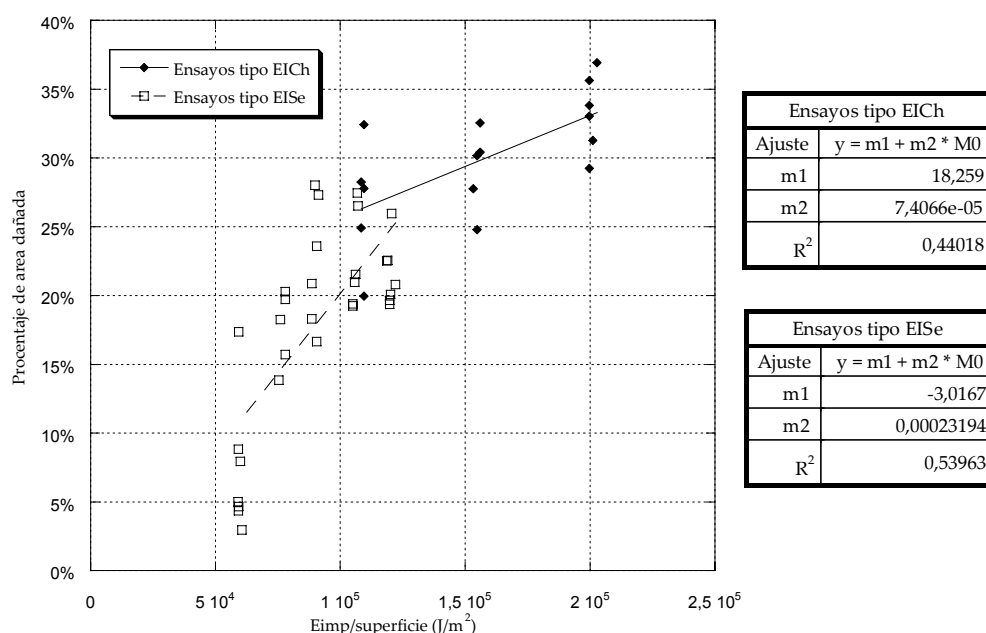


Figura 5.16. Porcentaje de área dañada frente a energía de impacto por unidad de superficie.

En ambos tipos de ensayo se observa una tendencia creciente, es decir, a mayor energía de impacto mayor área dañada, sin embargo, se observan diferencias entre los dos tipos de ensayo. En primer lugar, en los ensayos tipo EICH, el área dañada es mayor para energías de impacto por unidad de superficie similares, el percutor tipo Charpy abarca todo el ancho de la probeta y provoca una gran delaminación, mientras el percutor de punta semiesférica produce un daño más localizado. En segundo lugar, si se estima una pendiente media en ambos tipos de ensayo, ésta es



menor en los ensayos tipo EICh. Aún así, la dispersión de resultados no permite un buen ajuste, los valores de  $R^2$  son muy pequeños, 0,44 y 0,54 para los ensayos tipo EICh y EISe respectivamente. También se aprecia una mayor dispersión de resultados en torno a una energía de impacto por unidad de superficie de  $10^5 \text{ J/m}^2$ , correspondiendo con la energía para la cual se extiende la delaminación en los dos tipos de ensayo.

En la siguiente figura se muestra la energía absorbida por unidad de superficie frente al porcentaje de área dañada.

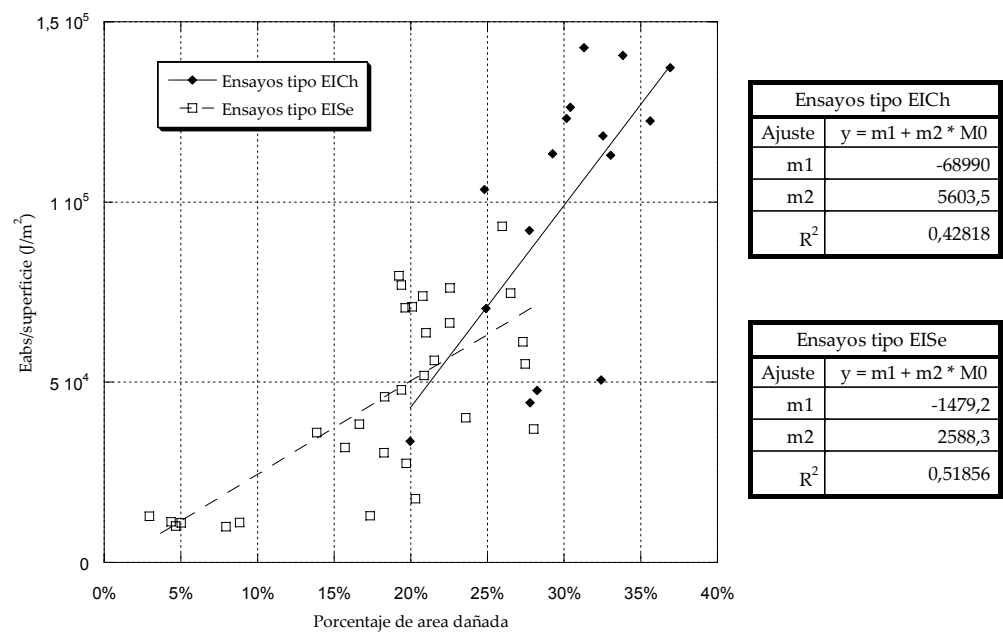


Figura 5.17. Energía absorbida por unidad de superficie frente a porcentaje de área dañada.

En los dos tipos de ensayo, figura 5.17, se pueden encontrar probetas con un área dañada similar pero que han absorbido una cantidad de energía muy distinta, alcanzando unas diferencias de un 300%. Estos resultados indican que los diferentes mecanismos de daño que tienen lugar durante el impacto no tienen la misma extensión superficial, en estos ensayos no se puede establecer una relación entre la extensión de la superficie dañada y la cantidad de energía absorbida. Aún así, se puede apreciar que la energía absorbida tiende a crecer al aumentar el área dañada, y si se aproximan los resultados a una recta, se observa una pendiente

mayor en los ensayos tipo EICH que en los de tipo EISE. El ajuste, no obstante, es bastante impreciso, teniendo unos valores de  $R^2$  de 0,43 y 0,52 en los ensayos de tipo EICH y EISE respectivamente.

### 5.3.3. Propiedades residuales a flexión

Para estimar las propiedades residuales a flexión de las probetas ensayadas, es necesario conocer, previamente, las propiedades del laminado sin dañar. Se han realizado unos ensayos de referencia, en la configuración de flexión en tres puntos, sobre los dos tipos de probetas, cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla.

	Resistencia a flexión		Módulo aparente a flexión	
	media (MPa)	Coef. Var.	media (MPa)	Coef. Var.
Tipo EICH	756	6%	30,9	4%
Tipo EISE	702	5%	29,3	2%

Tabla 5.1. Propiedades mecánicas de referencia a flexión.

Analizando los resultados de los ensayos de referencia, cabe destacar como dato significativo, que en los ensayos de tipo A se obtuvieron resultados ligeramente mayores que en los ensayos de tipo B, tanto en la resistencia (8%) como en el módulo aparente (5%). Estas diferencias no son muy significativas ya que son muy cercanas al coeficiente de variación, si bien son habituales en los materiales compuestos de tipo laminado por su sensibilidad a defectos internos, cuanto mayor es el área sometida a tensiones máximas, mayor es la probabilidad de encontrar defectos críticos. Por el mismo motivo, la resistencia en estos materiales es mayor a flexión que a tracción, en el ensayo de flexión únicamente la cara externa del laminado está sometida a tensiones máximas, mientras que en el ensayo de tracción lo está toda la sección. Wisnom (1992) explicó este hecho en

términos de estadística de Weibull considerando que los defectos críticos están distribuidos estadísticamente en el material.

Estos valores de referencia se han utilizado para estimar las propiedades residuales de las probetas dañadas. En las siguientes figuras se muestran la resistencia residual a flexión y el módulo aparente residual a flexión de cada probeta en función de la energía de impacto, adimensionalizados con el valor de referencia.

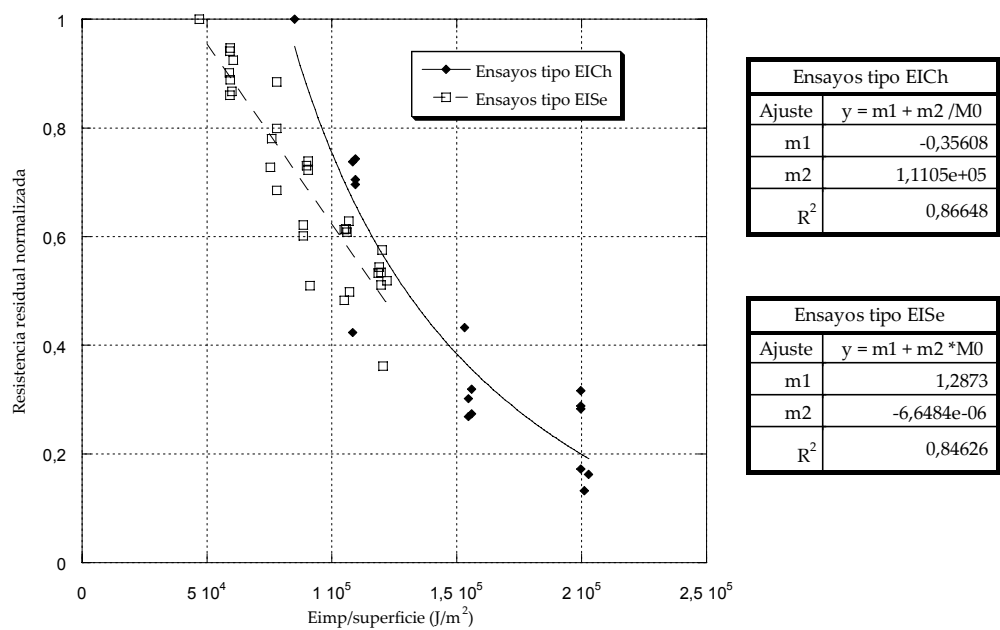


Figura 5.18. Resistencia residual a flexión frente a energía de impacto.

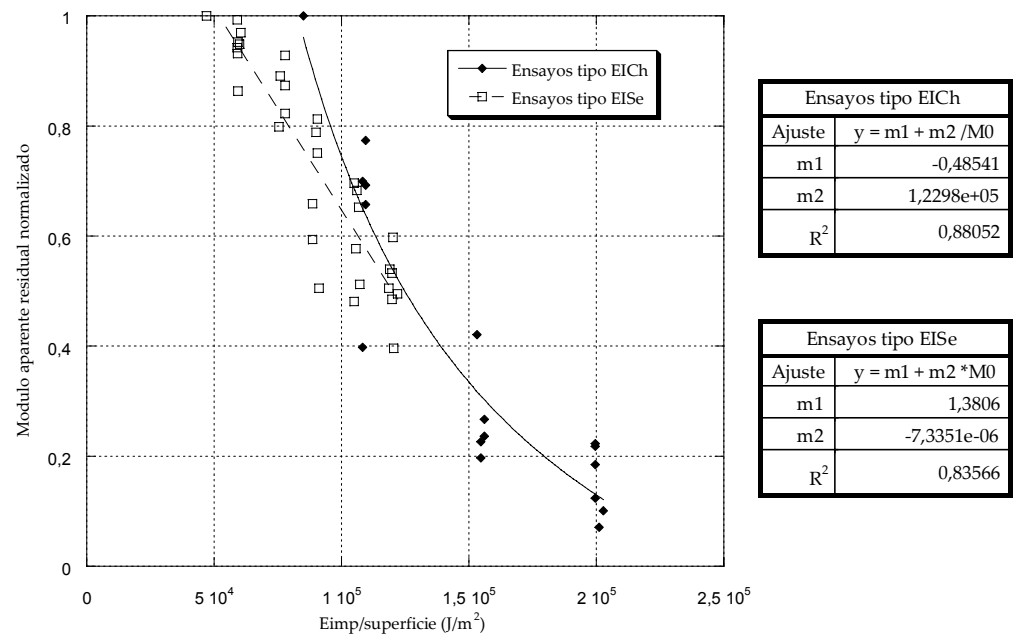


Figura 5.19. Módulo aparente a flexión residual frente a energía de impacto.

La perdida de propiedades mecánicas afecta de manera muy similar a la resistencia residual y al módulo aparente a flexión. Una vez más, se obtienen resultados diferentes en los dos tipos de ensayo, en primer lugar, las propiedades residuales de las probetas sometidas a un impacto de tipo EISE caen linealmente con la energía de impacto, mientras que las de los ensayos tipo EICH pierden propiedades con una pendiente que va decreciendo con la energía de impacto. Por otro lado, en los ensayos de tipo EICH, los valores de energía de impacto por unidad de superficie son mayores y, consecuentemente, la pérdida de propiedades también es mayor que en los ensayos tipo EISE. En los ensayos tipo EICH la resistencia residual cae hasta un 13% de la resistencia de referencia, mientras que en los ensayos tipo EISE, la menor resistencia residual es de un 36%. El módulo aparente residual a flexión desciende hasta un 7% en los ensayos tipo EICH, contrastando con un mínimo de un 40% en el caso de los ensayos tipo EISE.

Sin embargo, si se comparan los dos tipos de ensayo para una misma energía de impacto por unidad de superficie, se observa una pérdida de propiedades menor en los ensayos tipo EICH, a pesar de que el porcentaje de área dañada sea mayor.

El percutor de punta semiesférica produce un daño más localizado que, a pesar de tener menor extensión, produce una mayor pérdida de resistencia y de rigidez en el laminado. El percutor tipo Charpy, por el contrario, reparte la fuerza sobre una superficie mayor, de esta forma, aunque el área dañada sea muy extensa la pérdida de propiedades residuales es menor.

En las siguientes figuras se muestran la resistencia residual y el módulo aparente residual a flexión en función del porcentaje de área dañada.

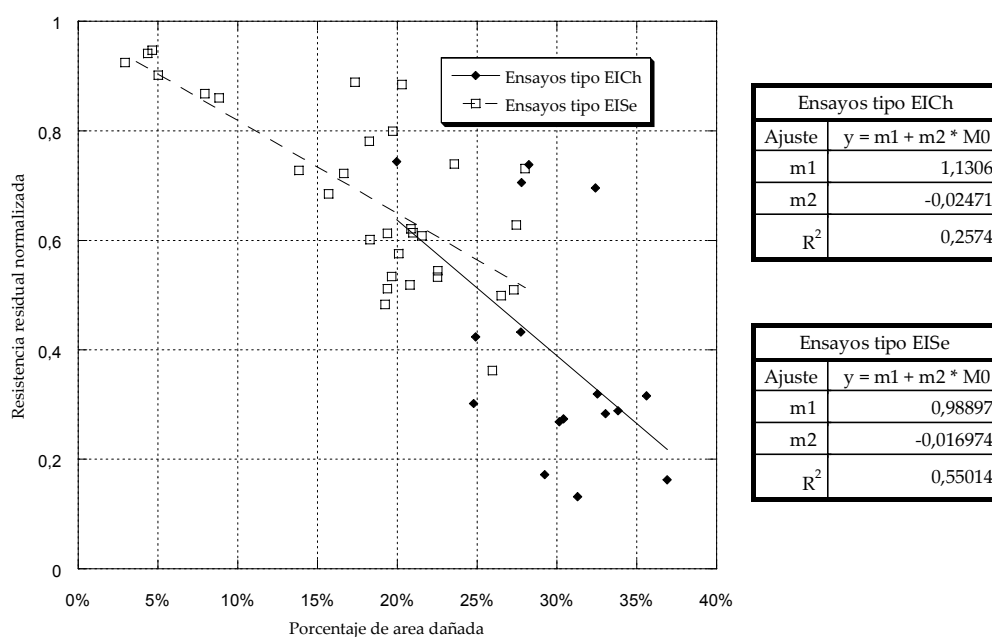


Figura 5.20. Resistencia residual a flexión frente a porcentaje de área dañada.

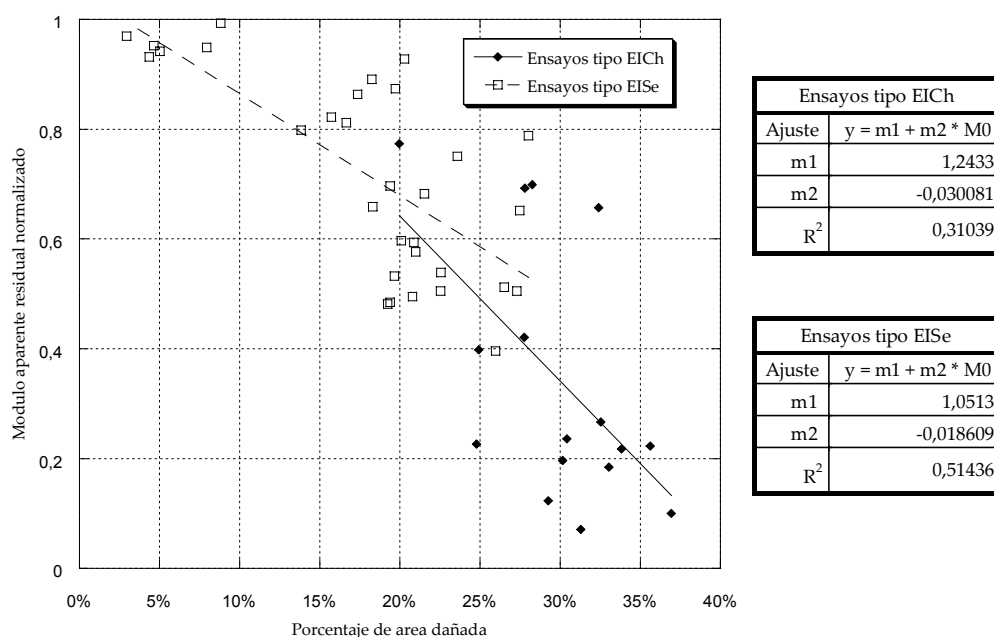


Figura 5.21. Módulo aparente a flexión residual frente a porcentaje de área dañada.

Tanto desde el punto de la resistencia residual como del módulo aparente a flexión, se observa una gran variabilidad en los resultados, probetas con un porcentaje de área dañada similar presentan unas propiedades residuales completamente diferentes. A la vista de estos resultados, se puede concluir que para esta configuración no es posible establecer una relación directa entre la extensión superficial del daño en un laminado y sus propiedades residuales.

Si se ajustan los resultados a una recta, se aprecia una pendiente mayor en los ensayos de tipo EICH que en los de tipo EISE, es decir un aumento en la extensión del área dañada implica una mayor pérdida de propiedades mecánicas a flexión si se emplea el percutor tipo Charpy que si se utiliza el de punta semiesférica. Sin embargo, el ajuste realizado no tiene una buena precisión,  $R^2=0,31$  para los ensayos tipo EICH y  $R^2=0,51$  para los de tipo EISE.

En las siguientes figuras se muestran las propiedades residuales a flexión de las probetas dañadas frente a la energía absorbida.

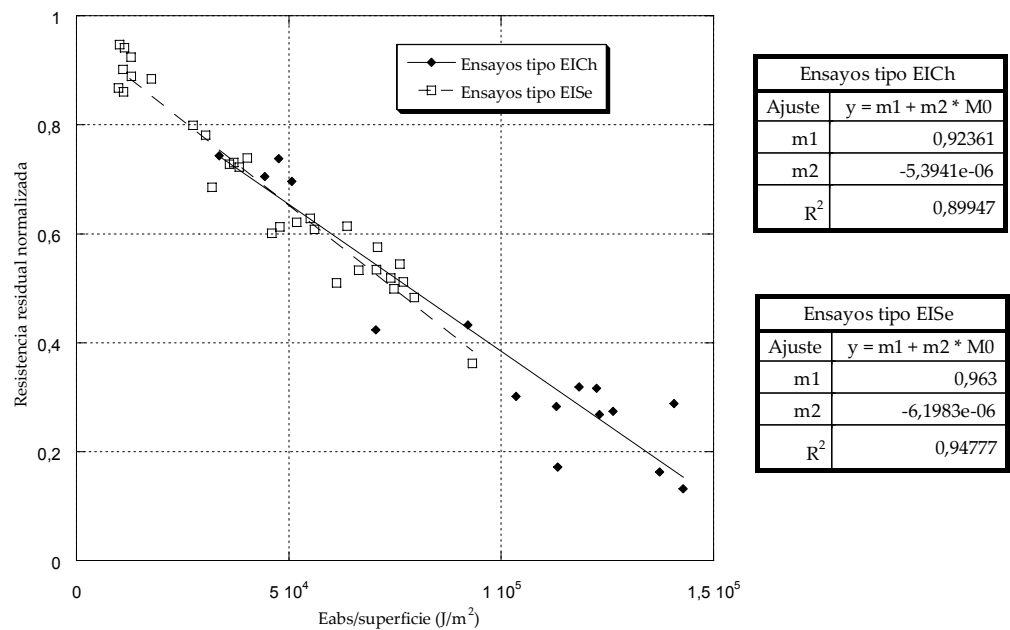


Figura 5.22. Resistencia residual a flexión frente a energía absorbida.

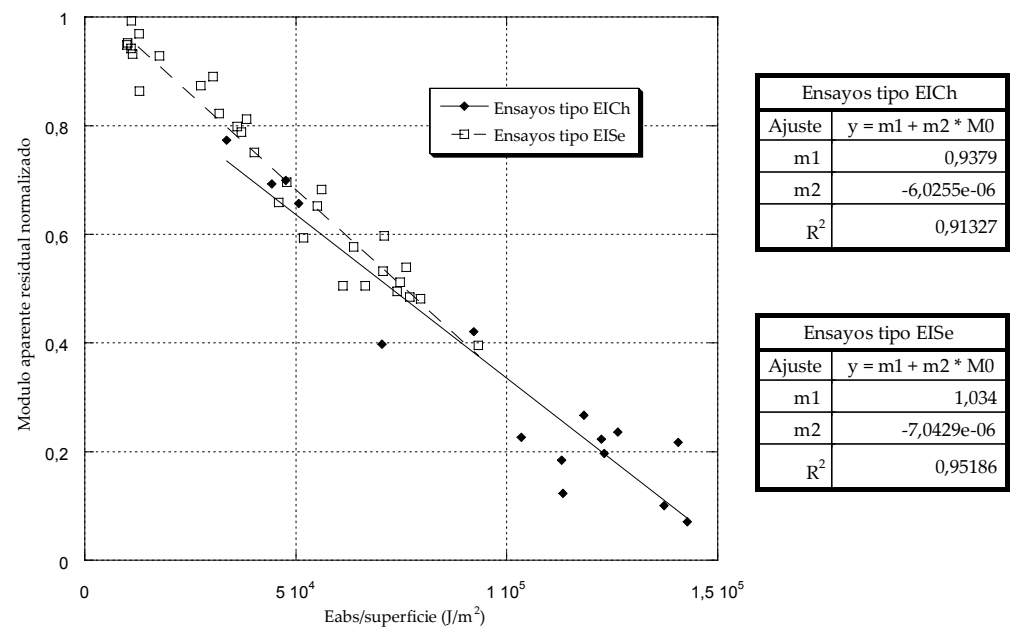


Figura 5.23. Módulo aparente a flexión residual frente a energía absorbida.

Tanto en los ensayos de tipo EICH como en los de tipo EISE, se puede afirmar que la resistencia residual y el módulo aparente residual a flexión son proporcionales a la energía absorbida por la probeta, se puede realizar un ajuste bastante preciso para los dos tipos de ensayo, siendo el coeficiente de correlación superior a 0,9. Estos resultados indican que las propiedades residuales a flexión de un laminado

son directamente proporcionales a la energía absorbida durante el impacto. Analizando el área dañada no se encuentra esta relación lineal, porque no todos los mecanismos de daño tienen la misma extensión. Para estimar el daño que ha sufrido un laminado el cálculo de la energía absorbida durante el impacto es una herramienta mucho más precisa que la extensión superficial del daño.



## **CAPÍTULO 6**

### **Conclusiones y trabajo futuro**

#### **6.1. Resumen y conclusiones**

Las conclusiones más relevantes obtenidas en esta tesis doctoral, se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Se han determinado los rangos de esbeltez en los que es necesario considerar la influencia de las tensiones de cortadura interlaminar en el cálculo de los desplazamientos y de las tensiones en vigas de tipo laminado sometidas a esfuerzos de flexión, en función de la velocidad de aplicación de la carga y de la relación entre la rigidez aparente a flexión y a cortadura interlaminar. Se ha observado que en condiciones dinámicas las tensiones de cortadura tienen mayor influencia que en condiciones estáticas para una misma esbeltez. Además, La influencia de las tensiones de cortadura es menor si se analizan los desplazamientos producidos en la viga que si se

estudian las tensiones ponderadas con un valor de resistencia mediante una variable basada en el criterio de rotura de Tsai-Hill.

- Se han comparado distintos métodos para el cálculo del factor de corrección de cortadura en laminados en función de la secuencia de apilamiento, de la distancia entre apoyos y de la velocidad de aplicación de la carga, indicando cuando es posible utilizar el método de Timoshenko atendiendo a su influencia en los resultados de desplazamientos y tensiones en la viga. Se ha observado que cuantas más láminas con diferente orientación tiene un laminado, el método de Timoshenko tiene menor precisión frente a métodos específicos para laminados.
- Se ha validado el método de las funciones de influencia para el cálculo de desplazamientos y los giros en vigas de tipo laminado con diferentes condiciones de contorno y secuencias de apilamiento. Se ha demostrado que sus resultados son similares a los del análisis modal y a los obtenidos mediante un modelo de los elementos finitos, además se ha comprobado la similitud de sus resultados con los experimentales.
- Se ha realizado un análisis del fenómeno de acoplamiento de esfuerzos flexión-torsión en vigas de tipo laminado de sección rectangular en función de las propiedades elásticas de la lámina y de la secuencia de apilamiento del laminado. Se ha demostrado que el método de las funciones de influencia predice con precisión los desplazamientos y los giros de flexión producidos en un laminado con acoplamiento entre los esfuerzos de flexión y torsión. La precisión en el cálculo del giro de torsión es menor, pero no es debido al método de las funciones de influencia sino a que el modelo unidimensional empleado no reproduce fielmente el fenómeno de torsión.
- Se ha implementado un modelo de comportamiento mecánico para el estudio de estructuras de tipo viga constituidas por laminados sometidas a impactos que generen esfuerzos de flexión en un código de elementos

finitos a través de una subrutina de usuario. Este modelo ha sido validado mediante ensayos experimentales de flexión dinámica en torre de caída variando la energía de impacto y la distancia entre apoyos, los resultados obtenidos mediante las simulaciones han coincidido satisfactoriamente con los experimentales.

- Se ha estudiado, mediante simulaciones numéricas, la influencia de la energía de impacto en los resultados del ensayo de flexión dinámica en función de la distancia entre apoyos, estableciendo un rango de energías dentro del cual se pueden realizar los ensayos garantizando la rotura de la probeta, manteniendo un contacto permanente de la probeta con el percutor y los apoyos y obteniendo un registro fuerza-tiempo con un nivel de ruido razonable. Se ha observado que la velocidad de deformación que se puede alcanzar en un ensayo de flexión dinámica está limitada, dado que se puede producir el despegue de la probeta respecto del percutor o de los apoyos.
- Se han comparado diferentes técnicas de medida del desplazamiento dinámico en ensayos en torre de caída, determinando que la técnica óptima con los medios disponibles y el rango de energías ensayado (entre 8 J y 30 J) es la integración del registro fuerza-tiempo estimando la velocidad de impacto mediante la toma de imágenes con una cámara de alta velocidad.
- Se ha realizado un estudio de tolerancia al daño a flexión generando el daño en las probetas mediante ensayos de flexión dinámica encontrando una relación directa entre la energía absorbida durante el impacto y las propiedades mecánicas a flexión.
- En el estudio de tolerancia al daño realizado no se puede establecer una relación directa entre el área dañada y las propiedades residuales a flexión como proponen otros autores. Esto es debido a que, en los ensayos realizados en esta tesis, concurren diferentes mecanismos de daño al mismo

tiempo y el daño predominante depende de la energía de impacto. En los estudios en los que el mecanismo de daño principal es la delaminación sí que puede establecerse esta relación directa entre el área dañada y las propiedades residuales.

- Las propiedades mecánicas residuales a flexión tras un impacto son distintas si se aplica la carga de forma diferentes, concretamente la geometría del extremo del percutor tiene su influencia en las propiedades residuales.

## 6.2. Trabajos futuros

A partir de los resultados obtenidos en esta tesis doctoral se plantean las siguientes líneas de trabajo futuro.

- Desarrollar un modelo analítico simplificado, empleando el método de las funciones de influencia para su resolución, que considere la flexión de vigas de tipo laminado con sección de pared delgada, incluyendo secciones variables a lo largo de la longitud de la viga.
- Utilizar el método de las funciones de influencia para estudiar el comportamiento a flexión de vigas delaminadas. En este modelo habría que considerar fenómenos de acoplamiento, debido a la no simetría de la zona delaminada, y se debería incluir la influencia de las tensiones de cortadura interlaminar debido a la pequeña esbeltez.
- Simular numéricamente impactos de baja energía, mediante el método de los elementos finitos, utilizando un modelo no homogéneo que distinga entre las láminas y la entrecara para predecir con precisión el daño generado por delaminación.

- Realizar un estudio de tolerancia al daño a flexión utilizando diferentes geometrías en el extremo del percutor y en las probetas para analizar con la influencia de estas variables en las propiedades residuales a flexión.



# Publicaciones relacionadas

A continuación se citan las publicaciones del autor en esta tesis doctoral relacionadas con el tema de la investigación:

- Artículos en revistas internacionales:

Santiuste, C., Sánchez-Sáez, S. y Barbero, E. "Application of the flexibility influence functions method in the dynamic analysis of composite beams". *Journal of Solids and Structures*, 44, pp4795-4809, 2007

- Comunicaciones a congresos:

Santiuste, C., Barbero, E., Sánchez-Sáez, S. y Navarro, C. "Influencia de las tensiones de cortadura interlaminar en el ensayo de flexión en tres puntos". *Congreso Nacional de Materiales Compuestos*, Valencia, pp651-658, 2005





# Bibliografía

- Abramovich, H. "Free-vibrations of gravity loaded composite beams". Composite Structures, 23(1), pp17-26, 1993
- Abrate, S. "Impact on composite structures". Cambridge University Press. 1998
- Agarwal, B.D. y Broutman, L.J. "Analysis and performance of fiber composites". Wiley-Interscience Publication, New York, 1990
- Amaro, A.M., Reis, P.N.B. y Moura, M.F.S.F. "Residual strength after low velocity impact in carbon-epoxy laminates". Materials Science Forum, 514-516, pp624-628, 2006
- Armstrong, K.B., Graham Bevan, L. y Cole, W.F. "Care and repair of advanced composites". SAE international. USA. 2005
- ASTM D790-98. "Standard test methods for flexural properties of unreinforced and reinforced plastics and electrical insulating materials". American Society of Testing Materials, 1998
- ASTM D2344/D2344M-00. "Standard test method for short-beam strength of polymer composite materials and their laminates". American Society of Testing Materials, 2006
- ASTM D7136M-05. "Measuring the damage of a fiber-reinforced polymer matrix composite to a drop-weight impact event". American Society of Testing Materials, 2005

- Barbero, E.J. "Introduction to Composite Material Design". Taylor and Francis. 1999
- Banerjee, J.R. "Explicit analytical expressions for frequency equation and mode shapes of composite beams". International Journal of Solids and Structures, 38, pp2415-2426, 2001
- Brewer, J.C. y Lagace, P.A., "Quadratic stress criterion for initiation of delamination". Journal of Composite Materials, 22(12), pp1141-1155, 1988
- Cantwell, W.J. y Morton, J. "Comparison of the low and high velocity impact response of CFRP". Composites, 20, pp545-551, 1989
- Carlsson, L.A. y Byron Pipes, R. "Experimental characterization of advanced composite materials". Technomic Publishing Company, 1997
- Carvelli, V. y Savoia M. "Assessment of plate theories for multilayered angle-ply plates. Composites Structures, 39 (3-4), pp197-207, 1997
- Chandra, R., Stemple, A.D., y Chopra, I. "Thin-Walled composite beams under bending, torsional, and extensional loads". Journal of Aircraft, 27, pp619-626, 1990
- Chang, F. y Chang, K.A. "A progressive damage model for laminated composites containing stress concentrations". Journal of Composite Materials, 21, pp834-855, 1987
- Cochelin, B. y Potier Ferry, M., "A numerical model for buckling and growth of delaminations in composite laminates". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 89, pp361-80, 1991
- Cowper, G.R. "The shear coefficient in Timoshenko's beam theory". Journal of Applied Mechanics", 33, pp335-340, 1966

- Dancila, D.S. y Armanios, E.A. "The influence of coupling on the free vibration of anisotropic thin-walled closed-section beams". *International Journal and Structures*, 35(23), pp3105-3119, 1998
- Daniel, I.M. y Ishai, O. "Engineering Mechanics of Composite Materials". Oxford University Press. 1994
- Delfosse, D., Poursartip, A., Coxon, B.R. y Dost, E.F. "Non-penetrating impact behaviour of CFRP at low and intermediate velocities". *Composite Materials: Fatigue and Fracture*, 5, pp333-350, 1995
- Demakos, C.B. "Stress fields in fiber reinforced laminate beams due to bending and torsion moments". *Journal of Reinforced Plastic and Composites*, 22 (5), pp399-418, 2003
- Dharmarajan, S. y McCutchen, H. "Shear coefficients for orthotropic beams". *Journal of Composite Materials*, 7, pp530-535, 1973
- Dong, X.J., Meng, G., Li, H.G. y Ye, L. "Vibration analysis of a stepped laminated composite Timoshenko beam". *Mechanics Research Communications*, 32, pp572-581, 2005
- Duarte, A., Herszberg, I. y Paton, R. "Impact resistance and tolerance of interleaved tape laminates". *Composite Structures*, 47, pp753-58, 1999
- Fernández-Sáez, J. y Navarro, C. "Fundamental frequency of cracked beams: an analytical approach". *Journal of Sound and vibration*, 256(1), pp17-31, 2002
- Found, M.S., Howard, I.C. y Paran, A. P. "Interpretation of signals from dropweight impact tests". *Composite Structures*, 42(4), pp353-363, 1998
- Hallett, S.R. "Three-point beam impact tests on T300/914 carbon-fibre composites". *Composites Science and Technology*, 60(1), pp115-124, 2000

- Hashemi, S.M. y Richard, M.J. "A dynamic finite element method for free vibration of bending-torsion coupled beams". *Aerospace Science and Technology*, 4, pp41-55, 2000
- Hawyes V.J., Curtis P.T. y Soutis C. "Effect of impact on the compressive response of composite laminates". *Composite: Part A*, 32, pp1263-1270, 2001
- HKS. "Abaqus Explicit v6.4 User's Manual". Abaqus Inc, 2003
- Hou, J.P.; Petrinic, N.; Ruiz, C. y Hallet, S.R. "Prediction of impact damage in composite plates". *Composite Science and Tecnology*, 60, pp445-450, 2000
- Hull, D. "Materiales compuestos". Ed. Reverté. Barcelona, Spain. 1987
- Hutchinson, J.R. "Shear coefficients for Timoshenko beam theory". *Journal of Appied Mechanics*", 68, pp87-92, 2001
- Kapania, R.K. y Raciti, S. "Recent advances in analysis of laminated beams and plates I: shear effects and Buckling". *AIAA Journal*, 27 (7), pp923-934, 1989
- Kapania, R.K. y Raciti, S. "Recent advances in analysis of laminated beams and plates II: vibrations and wave propagation". *AIAA Journal*, 27 (7), pp935-946, 1989
- Khalid, Y.A., Ali, F.A., Sahari, B.B. y Saad, E.M.A. "Performance of composite I-beams under axial compression and bending load modes". *Materials and Design*, 26(2), pp127-135, 2005
- Khondker, O.A., Herszberg, I. y Hamada, H. "Measurements and prediction of the compression-after-impact strength of glass knitted textile composites". *Composites Part A*, 35(2), pp145-157, 2004

- Kim, J-K., Mackay, D.B. y Mai, Y-W. "Drop-Weight Impact Damage Tolerance of CFRP with Rubber-Modified Epoxy Matrix". *Composites*, Vol. 24(6), pp485-494, 1993
- Lamy, B. y Dixneuf, E. "Damage Tolerance of Composite Materials Subject to Dynamic Flexural Test", *Advanced Composites Letters*, 9, pp67-71, 2000
- Lee, J. y Kim, S.E., "Flexural-torsional coupled vibration of thin-walled composite beams with channel sections". *Composite and Structures*, 80, pp133-144, 2002
- Levinson, M. "An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates". *Mechanics Research Communications*, 7, pp343-350, 1980
- Li, J., Shen, R., Hua, H. y Jin, X. "Bending-torsional coupled dynamic response of axially loaded composite Timosenko thin-walled beam with closed cross-section". *Composite Structures*, 64 (1), pp23-35, 2004
- Lifshitz, J.M., Gov, F. y Gandelman, M. "Instrumented low-velocity impact of CFRP beams". *International Journal of Impact Engineering*, 16(2), pp201-215, 1995
- Lopez-Puente, J. "Análisis y modelización de impactos de alta velocidad sobre laminados carbono/epoxi". Ph.D. thesis, Universidad Carlos III de Madrid, 2003
- Madabhusi-Raman, P. y Davalos, J.F. "Static shear correction factor for laminated rectangular beams". *Composites part B-Engineering*, 27 (3-4), pp285-293, 1996
- Mangalgiri, P.D. "Composite materials for aerospace applications". *Bulletin of Materials Science*, 22 (3), pp657-664, 1999
- Meirovitch, L. "Analytical methods in vibrations". MacMillan Publishing Co. New York, 1967

- Meunier, M. "Dynamic analysis of FRP laminated and sandwich plates". Ph.D. thesis, School of Engineering Sciences, University of Southampton, 2001
- MIL-HDBK-17-3E, Polymer matrix composites, Vol. 3 materials usage, design and analysis, Department of Defense Handbook, Department of Defense of United States of America, 1997
- Mili, F. y Necib, B. "Impact behavior of cross-ply laminated composite plates under low velocities", *Composite Structures*, 51(3), pp237-244, 2001
- Miller, A.K. y Adams, D.F. "Analytic means of determining flexural and torsional resonant frequencies of generally orthotropic beams". *Journal of Sound and Vibration*, 41(4), pp433-449, 1975
- Miravete, A. "Materiales compuestos". Cambridge University Press. Zaragoza, Spain. 2000
- Mouritz, A.P., "The effect of underwater explosion shock loading on the flexural properties of GRP laminates", *International Journal of Impact Engineering*, 18, pp129-139, 1996
- Murthy, M.V.V. "An improved transverse shear-deformation theory for laminated anisotropic plates". NASA TP-1903, 1981
- Naik, N.K., Ramasimha, R., Arya, H., Prabhu, S. V. y ShamaRao, N., "Impact response and damage tolerance characteristics of glass-carbon/epoxy hybrid composite plates". *Composites Part B: Engineering*, 32(7), pp565-574, 2001
- Nishikawa, M., Okabe, T. y Takeda, N. "Numerical simulation of interlaminar damage propagation in CFRP cross-ply laminates under transverse loading". *International Journal of Solids and Structures*, 44(10), pp3101-3113, 2007

- Okoli, O.I. y Abdul-Latif, A. "Failure in composite laminates: overview of an attempt prediction". *Composites: Part A*, 33, pp315-321, 2002
- Panda, B. y Chopra, I. "Dynamics of composite rotor blades in forward flight". *Vertica*, 11, pp187-209, 1987
- Pegoretti, A., Zanolli, A. y Migliaresi, C. "Flexural and interlaminar mechanical properties of unidirectional liquid crystalline single-polymer composites". *Composites Science and Technology*, 66, pp1953-1962, 2006
- Penny, J. y Reed, J. "An integral equation approach to the fundamental frequency of vibrating beams". *Journal of Sound and Vibration*, 9(4), pp393-400, 1971
- Press W.H. "FORTRAN Numerical Recipes". Cambridge University Press, Cambridge, 1994
- Puchegger, S., Loidl, D., Kromp, K. y Peterlik, H. "Hutchinson's shear coefficient for anisotropic beams". *Journal of Sound and Vibration*, 266, pp207-216, 2003
- Reddy, J.N. "A simple higher-order theory for laminated composites". *Journal of Applied Mechanics*, 51, pp745-752, 1984
- Reddy, J.N. "Mechanics of laminated composites plates". CRC Press. 1997
- Rizov, V.I. "Low velocity localized impact study of cellular foams". *Materials and Design*, 2006, IN PRESS
- Rotem, A. "Residual flexural strength of FRP composite specimens subjected to transverse impact loading". *SAMPE Journal*, 24, pp19-25, 1988
- Sánchez-Sáez, S. "Comportamiento mecánico a flexión y tolerancia al daño de materiales compuestos de fibra de carbono y matriz epoxi a baja temperatura". Ph.D. thesis, Universidad Carlos III de Madrid, 2002

- Sánchez-Sáez, S, Barbero, E., Zaera, R. y Navarro, C. "Compression after impact of thin composite laminates". *Composite Science and technology*, 65(13), pp1911-1919, 2005
- Sapountzakis, E.J. "Torsional vibrations of composite bars by BEM". *Composite Structures*, 70(2), pp229-239, 2005
- Scarponi, C., Perillo, A.M., Cutillo, L. y Foglio, C. "Advanced TTT composite materials for aeronautical purposes: Compression after impact (CAI) behaviour". *Composites Part B*, 38, pp258-264, 2006
- Schubel, P.M., Luo, J-J. y Daniel, I.M. "Impact and post impact behaviour of composite sandwich panels". *Composites: Part A*, 38, pp1051-1057, 2007
- Sjöblom, P.O., Hartness, J.T. y Cordell, T.M. "On low-velocity impact testing of composite materials". *Journal of Composite Materials*, 22, pp30-52, 1988
- Soden, P.D., Hinton, M.J. y Kaddour, A.S. "A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates". *Composite Science and Technology*, 58, pp1225-1254, 1998
- Soutis C. y Curtis, P.T. "Prediction of the post-impact compressive strength of cfrp laminated composites". *Composites Science and Technology*, 56(6), pp677-684, 1996
- Subrahmanyam, K.B. y Kaza, K.R.V. "Non-linear flap-lag-extensional vibrations of rotating, pretwisted, preconed beams including Coriolis effects". *International Journal of Mechanical Sciences*, 29(1), pp29-43, 1987
- Subrahmanyam, K.B. y Garg, A.K. "Uncoupled flexural vibrations of straight beams with all possible boundary conditions treated by a transfer matrix method". *Journal of Sound and Vibration*, 204 (3), pp397-419, 1997



- Teh, K.K. y Huang C.C. "The effects of fibre orientation on free vibrations of composite beams". *Journal of Sound and Vibration*, 69 (2), pp327-337, 1980
- Timoshenko, S.P. "On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars". *Philosophical Magazine*, 41, pp744-746, 1921
- Tomita, Y. y Morioka, K. "Effect of lay-up sequence on mechanical properties and fracture behaviour of advanced CFRP laminate composite". *Materials Science and Engineering A*, 234-236(30), pp778-781, 1997
- Vinson, J.R. y Sierakowski, R.L. "The Behavior of Structures Composed of Composite Materials. Springer. 1986
- Whitney, J.M, y Leissa, A.W., "Analysis of heterogeneous anisotropic plates", *Journal of Applied Mechanics*, 36(2), pp261-266, 1969
- Whitney, J.M. "Shear correction factors for orthotropic laminates under static load". *Journal of Applied Mechanics*, 40, pp302-304, 1973
- Wisnom, M.R. "The relationship between tensile and flexural strength of unidirectional composites". *Journal of Composite Materials*, 30, pp357-367, 1992
- Yildirim, V. y Kiral, E. "Investigation of the rotary inertia and shear deformation effects on the out-of-plane bending and torsional natural frequencies of laminated beams". *Composite Structures*, 49(3), pp313-320, 2000
- Zhang, X., Hounslow, L. y Grassi, M. "Improvement of low-velocity impact and compression-after-impact performance by z-fibre pinning". *Composite Science and Technology*, 66(15), p2785-2794, 2006

- Zhang, Z.Y. y Richardson, M.O.W. "Low velocity impact induced damage evaluation and its effect on the residual flexural properties of pultruded GRP composites". Composite Structures, 2006 IN PRESS

# Anejo A. ECUACIONES CONSTITUTIVAS DE LA LÁMINA

Ecuación constitutiva de la lámina en ejes de la lámina:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}; & S_{44} &= \frac{1}{G_{23}}; & S_{12} &= -\frac{\nu_{21}}{E_2}; \\ S_{22} &= \frac{1}{E_2}; & S_{55} &= \frac{1}{G_{13}}; & S_{13} &= -\frac{\nu_{31}}{E_3}; \\ S_{33} &= \frac{1}{E_3}; & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}}; & S_{23} &= -\frac{\nu_{32}}{E_3}; \end{aligned}$$

Agrupando:

$$\{\varepsilon\} = [S] \cdot \{\sigma\}$$

Ecuación constitutiva de la lámina en ejes del laminado:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{S}_{13} & \bar{S}_{23} & \bar{S}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{S}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{S}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

agrupando:

$$\{\varepsilon\} = [\bar{S}] \cdot \{\sigma\}$$

siendo:

$$[\bar{S}] = [R]^T \cdot [S] \cdot [R]$$

donde:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cdot \cos \theta & \sin \theta \cdot \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

# Anejo B. MÉTODOS NUMÉRICOS

En este anejo se presentan los métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias utilizados en esta tesis doctoral. Los métodos están aplicados a la resolución de ecuaciones del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

con las condiciones iniciales:

$$y(x_0) = y_0 \quad \frac{dy}{dx}(x_0) = z_0 \quad (2)$$

## Método de Runge-Kutta de cuarto orden

El método de Runge-Kutta de cuarto orden evalúa la derivada de la función en cuatro puntos, tomando  $h$  como el paso de integración:

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x_k, y_k) \\ k_2 &= h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= h \cdot f(x_k + h, y_k + k_3) \end{aligned} \quad (3)$$

con  $k = 1, 2, \dots, m-1$

La solución se obtiene a partir de estas cuatro evaluaciones:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} \quad (4)$$

### Método de Adams-Bashforth-Moulton

El método de Adams-Bashforth-Moulton es un método multipaso de predicción y corrección, que utiliza el polinomio de interpolación de Lagrange para calcular el valor de predicción:

$$p_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(-9f_{k-3} + 37f_{k-2} - 59f_{k-1} + 55f_k) \quad (5)$$

este valor se utiliza para evaluar la derivada en el siguiente punto de integración:

$$f_{k+1} = f(x_{k+1}, m_{k+1}) \quad (6)$$

La solución propuesta por este método es:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(f_{k-2} - 5f_{k-1} + 19f_k + 9f_{k+1}) \quad (7)$$

### Método de Milne-Simpson modificado

El método de Milne-Simpson modificado es otro método multipaso de predicción y corrección, que utiliza el valor de predicción:

$$p_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}(2f_{k-2} - f_{k-1} + 2f_k) \quad (8)$$

con la modificación:

$$\begin{aligned} m_{k+1} &= p_{k+1} + 28 \frac{y_k - p_k}{29} \\ f_{k+1} &= f(x_{k+1}, m_{k+1}) \end{aligned} \quad (9)$$

La solución propuesta por este método es:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}) \quad (10)$$

### Algoritmo de Stoermer

El algoritmo de Stoermer es un método numérico para resolver ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden que requiere para su utilización que no aparezcan explícitamente las primeras derivadas de las funciones incógnitas. Las ecuaciones diferencias que se pueden resolver mediante esta técnica son del tipo:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y) \quad (11)$$

con las condiciones iniciales:

$$y(x_0) = y_0 \quad \frac{dy}{dx}(x_0) = z_0 \quad (12)$$

El algoritmo de Stoerm se aplica de la siguiente forma:

$$y_1 = y_0 + h \cdot \left[ z_0 + \frac{1}{2} h f(x_0, y_0) \right] \quad (13)$$

$$y_{k+1} = 2y_k - y_{k-1} + h^2 f(x_0 + k \cdot h, y_k) \quad (14)$$

Para reducir errores de redondeo se puede usar el término  $\Delta_k \equiv y_{k+1} - y_k$ , quedando de la siguiente forma:

$$\Delta_0 = h \cdot \left[ z_0 + \frac{1}{2} h f(x_0, y_0) \right] \quad (15)$$

$$y_1 = y_0 + \Delta_0 \quad (16)$$

y para  $k = 1, 2, \dots, m-1$ :

$$\Delta_k = \Delta_{k-1} + h^2 f(x_0 + k \cdot h, y_k) \quad (17)$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta_k \quad (18)$$





# **Anejo C. DISPOSITIVO DE ENSAYO DE FLEXIÓN DINÁMICA**

A continuación se presentan los esquemas acotados del dispositivo de ensayo de flexión dinámica.

